# 피보나치 수열에 대하여

-수학사와 생활 속의 발견을 통한 흥미유발-

2004년 8월

西江大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

鄭 會 令

# 피보나치 수열에 대하여

-수학사와 생활 속의 발견을 통한 흥미유발-

지도교수 이 재 권

이 論文을 敎育學 碩士學位論文으로 提出함

2004년 7월 6일

西江大學校 敎育大學院

數學敎育 專攻

鄭 會 令

# 국문 초록

서강대학교 교육대학원

수학교육 전공

정 회 령

수학교과 목표에서도 나타나 있듯이 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 갖게 하는 것이 교육의 중요한 목표 중의 하나이다. 올바른 수학교육이란 인지적인 차원과 정의적인 차원의 결합을 필요로 한다. 수업에 있어서 학생들의 흥미를 유발시키는 재미있는 수학사와 우리들의 생활과 문화와 자연 속에 스며 있는 수학적 소재는 인지적 목표뿐만 아니라 정의적 목표를 달성하게 하여 학습자 스스로 수학에 대한 부정적인 시각을 해소하도록 도와 줄 수 있을 것이다.

이러한 취지와 필요성에 의하여, 본 논문은 수학 수업에 있어서 수학사를 이용하여 학생들의 흥미를 불러일으킬 수 있다는 것을 서술하고, 우리들의 생활과 문화와 자연 속에 스며 있는 수학적 소재 중에서 수학의 아름다움과 실용성을 동시에 보여 줄 수 있는 예로 피보나치 수열의 발견과 응용 분야를 중심으로 살펴보았다.

# <차　례>

# <표 차례>

## <그림 차례>

# Ⅰ. 서 론

수학은 인류의 역사와 더불어 시작되었다고 할 만큼 가장 오래된 학문이며, 각 시대마다 가장 중요하게 여겨져 온 교과목이다. 현대 사회가 정보화 시대로 접어들면서 수학은 많은 분야에 그 응용 범위를 넓혀가고 있다. 이에 따라 세계의 모든 국가는 과학 기술의 발달과 경제적 번영을 이루기 위해 여러 가지 노력을 기울이고 있다. 그러나 현재 우리나라 대부분의 고등학교는 학생들이 좋은 성적을 내기 위해 계산 수학만을 강조하다 보니, 많은 학생들이 수학에 대한 가치와 아름다움을 모르고, 수학을 어렵고 딱딱한 과목으로 인식하고 있다.

수학 교과서를 펼쳐보면 수식과 문제 그리고 정의들을 위주로 가득 차 있고, 재미있는 이야기는 단지 몇개 뿐이다. 보통 사람들에게 그 속에서 아름다움과 즐거움을 찾으라고 하는 것은 아무래도 무리로 생각된다. 학생들이 수학을 가장 싫어하는 과목으로 꼽는 것도 충분히 이해가 된다.

수학교과 목표에서도 나타나 있듯이 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 갖게 하는 것이 교육의 중요한 목표 중의 하나이다.[1] 또한 수학은 과학, 기술, 철학, 사상, 예술분야까지도 깊은 관련이 있는 학문이며 모든 학문의 기초가 되는 것임에 틀림이 없다. 이렇듯 수학은 일상 생활 면에서 집약적이고 논리적인 사고 능력을 길러 주어 문제 해결에 도움을 줄뿐만 아니라 다른 교과의 효율적인 학습에 토대가 되며 필수 교과로서 모든 학생들이 관심을 갖고 공부해야 할 중심적이고 중요한 학문이다.

---

1) 교육부, 『중학교 교육 과정 해설(Ⅲ)』, (서울 : 대한교과서(주), 1999), p.37.

올바른 수학교육이란 인지적인 차원(가르치는 내용)과 정의적인 차원(학습자의 태도, 흥미, 느낌)의 결합을 필요로 하기 때문에 흥미를 유발시키는 재미있는 수학사와 우리들의 생활과 문화와 자연 속에 스며 있는 수학적 소재를 통해 인지적 목표뿐만 아니라 정의적 목표를 달성하게 하여 학습자 스스로 수학에 대한 부정적인 시각을 해소하도록 도와 줄 교육방법을 연구할 필요가 있다.

교육 현장에서 수학을 지도하는데 있어 많은 수학 교사들이 공통적으로 가지고 있는 가장 큰 고민 중의 하나가 '어떻게 하면 많은 학생들이 좀 더 흥미를 가지고 수업에 적극적으로 참여하고 효과적으로 수업을 진행할 수 있을까?' 하는 것이라 생각한다. 일부가 아닌 대다수의 학생들에게 수학이 유용한 도구로써 활용될 수 있도록 학교 수학 수업의 프로그램이 설정되어야 한다는 뜻이다.

그러나 기호화, 형식화된 수학 과목은 그 위계성으로 인하여 학생들의 개인차가 매우 심하다. 이에 따라 성취도가 낮은 많은 학생들이 수학 학습에 흥미를 잃고 있으며, 이를 극복하기 위한 교사의 개별 지도도 어려운 실정이다.

학교 생활에서 학생들이 자연과 수학을 스스로 연결하고, 수학은 아직도 창조적인 상태에 있음을 깨닫도록 하는 것이 수학지도에 중요한 일이라고 생각된다. 이를 위하여 다양하고 이해하기 쉬운 수학사와 우리들의 생활과 문화와 자연 속에 스며 있는 수학적 소재들이 수업 매체로 이용된다면 성취도가 낮은 학생들도 기호나 숫자들의 나열로 이루어진 정형화된 문제만을 풀거나 교과서 위주의 문제 해결자로서의 일방적이고 따분한 역할에서

해방되어 수학을 더욱 친밀하고 흥미 있게 받아들이게 될 것이다. 이로써 학생들은 수학에 대하여 새로운 시각에서 관심과 흥미를 가지게 되어 적극적인 학습의욕으로 수업에 참여하게 될 것이다.

따라서 본 연구는 수학 수업에 있어서 수학사를 이용하여 학생들의 흥미를 불러일으킬 수 있다는 것을 서술하고, 이러한 수학사 중에서 피보나치 수열을 이용하여 흥미유발을 할 수 있도록 하기 위해, 피보나치의 생애, 피보나치 수열의 역사적 배경과 성질을 살펴보고, 자연 현상 속에서 관찰되어지는 수열과 건축, 미술, 음악 등 우리 문화 속에 적용되는 피보나치 수열의 형태를 조사·분석 하고자 한다.

# Ⅱ. 수학의 특성과 수학교육의 목적

## 1. 수학의 특성[2)]

수학은 인류의 역사와 더불어 시작되었다고 할 만큼 가장 오래 된 학문에 속한다. 역사적으로 수학은 기원전 2천년경(바빌로니아, 이집트)까지 거슬러 올라간다. 특히, 기원전 5세기부터 3세기까지(그리스)와 17세기경(유럽에서 무한소 계산법의 발생)의 풍요로운 발달 시기를 거쳐 20세기 초까지 자연과학 및 공학적인 문제와 밀접하게 결부되어 기하학, 대수학, 해석학의 고전적 분야가 크게 발달하였다. 교육부에서 제공한 수학과 교육 과정의 해설에 따르면 수학을 체계적이고 연역적인 과학으로 보는 입장과 구성 도중에 있는 실험적이고 귀납적인 과학으로 보는 입장도 있다. 즉, 정의, 정리, 알고리즘과 그 연역 체계 등을 수학으로 보는가 하면 그러한 수학적 이론을 만들고 수정하는 인간 사고 활동, 즉 수학을 하는 과정을 강조하는 입장도 있다. 그런 이유에서 수학을 특성을 한가지로 설명하기는 불가능하다.‘ 수학이란 무엇인가?’ 라는 질문에 대하여 여러 학자들이 모두 다양하게 대답하는 것도 그러한 이유 때문이다. 일반적으로 수학의 특성으로서 실용성, 추상성, 형식성, 계통성, 직관성과 논리성, 일반화와 특수화 등이 거론된다.

---

2) 교육부, 『중학교 교육 과정 해설(Ⅲ)』, (서울 : 대한교과서(주), 1999), pp.29-32.

(1) 실용성

수학은 실용성을 그 특성으로 하며, 실제 생활의 요구와 자연의 탐구에서 비롯되었다. 비록 그러한 수학이 이론 수학으로 발전하였으며, 현재 응용과는 무관하게 공리로부터 순수하게 수학이 전개되고 있을지라도 수학이 타학문과 실생활에 모델로 작용하고 있으며, 또 장차 작용할 개연성이 대단히 높다는 것은 부인할 수 없는 사실이다.

(2) 추상성

어떤 구체물의 집단이 있을 때, 각 구체물이 가지는 속성 중에서 이질적인 속성을 제거하여 나가면 결국 동질적인 속성만 남게 되는데, 각 구체물이 지니는 이 동질적인 속성을 끄집어내는 것을 추상화라고 한다. 예를 들어, 성냥갑, 벽돌, 상자 등이 지닌 여러 가지 속성 중에서 이질적인 속성, 즉 각 물체의 색깔이나 각 물체를 구성하고 있는 물질, 크기 등을 생각하지 않고 동질적인 속성, 곧 공통된 성질만을 생각하면 직육면체의 개념을 얻게 된다. 이와 같이 직육면체는 구체적인 물리적 대상에서 추상화가 이루어진 것이다. 수학에서 다루는 추상성이란 우리가 느끼고, 맛보고, 냄새맡고, 듣고, 볼 수 있는 물리적 세계나 그 세계에 대한 우리의 경험을 직접 다루는 것이 아니라, 우리 마음 속에 있는 아이디어를 다루는 것이다.

(3) 형식성

수학은 형식성이 강한 학문이다. 곧, 수학은 형식 언어로 쓰여진 공리를 바탕으로 하여 형식적인 추론 규칙에 의해 전개될 수 있는바, 이 때 공리나 기호의 의미는 중요하지 않다. 수학의 형식성은 수학적 증명의 엄밀성

과 수학 체계의 무 모순성을 보장하기 위한 장치로서, 19세기 말 독일의 힐베르트[3)]에 의해 더욱 명확하게 제시되었다. 그러나 형식화된 수학과 무의미한 기계적 조작은 구별된다. 무의미한 기계적 조작은 수학이 아니지만 의미와 무관해 보이는 형식화된 수학은 필요하다면 언제든지 의미가 부여될 수 있기 때문이다.

(4) 계통성

수학적 개념의 성장은 어떤 기초적인 내용을 기반으로 하여 그 기반 위에 다른 내용을 더 첨가함으로써 기초적인 내용과 새로운 내용을 일관성 있게 이어 나가면서 이루어진다. 이러한 성장 과정을 거친다는 의미에서 수학은 계통적이라 할 수 있다. 계통성은 수학 교육 과정의 구성에 핵심적인 역할을 한다. 즉, 계통성은 학습 내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지도록 해 주는 것이다. 잘 알려진 대로 자연수, 정수, 유리수, 실수로의 확장은 바로 이러한 계통성의 전형적인 예라고 할 수 있다.

(5) 직관성과 논리성

유클리드의 기하와 같이 수학은 엄밀한 논리적 구조로 이루어져 있다. 즉, 분석적이고 단계적으로 전제나 선행 명제로부터 결론이나 후속 명제나

---

3) 힐베르트(1862-1943) : 형식주의 학파는 힐베르트가 기하학의 공준적 연구를 마무리한 후 창시하였다. 힐베르트는 <기하학 기초론, 1899>에서 유클리드의 내용적인 공리적인 방법으로부터 현재의 형식적인 공리적 방법으로 수학적 방법을 강화하였다. 형식주의적 견해는 집합론의 역설에 의해 야기된 위기와 직관주의적 비평에 의해 야기된 고전수학에의 도전을 만난 후에 힐베르트에 의하여 발전되었다. 힐베르트가 일찍이 1904년에 형식주의적 용어를 사용하긴 했지만 1920년 이후에야 비로소 공동 연구자들, 베르나이스, 아케르만, 폰 노이만 등이 현재 형식주의자의 계획으로 알려진 것에 관한 연구를 진지하게 시작하였다. ( Howard Eves 지음, 이우영・신항균 옮김, 『수학사』, (서울 : 경문사, 2002), pp.568-569. )

정당하게 이끌어 내어지고 있는 것이다. 따라서, 수학자들은 아직 부정되지는 않았지만 골드바흐의 추측[4] 등과 같이 전제로부터 논리적으로 정당화하지 못한 것을 수학적 영역으로 도입하기를 꺼리는 실정이다. 그러나 논리적으로 정당화할 대상은 사실상 직관에 의해서 발견, 발명된다. 직관은 사고 대상을 인지하는 활동이 다소 불분명하지만 전체를 감지할 수 있는 사고이며, 이론 전개의 선행, 방향, 기틀을 마련해 주는 직감적 아이디어로서 이론과 구체를 맺어 주는 것 또는 구체에서 논리의 방향을 시사해 주는 것이다. 따라서, 직관적 사고는 수학의 발명 또는 발견에 중요한 역할을 하며, 논리적 사고는 발명 또는 발견된 수학의 정리에 정당성을 부여하는 데 필수적이다.

(6) 일반화와 특수화

일반화는 하나의 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함한 집합에 대한 고찰로 옮겨가는 것을 말한다. 예를 들면, 삼각형에 대한 고찰로부터 임의의 다각형에 대한 고찰로 나아가거나, 예각의 삼각함수에 대한 연구로부터 임의 각의 삼각함수에 대한 연구로 나아가는 것 등이 일반화이다. 이러한 일반화를 통하여 수학이나 과학에서 많은 법칙을 발견하였다. 0이 아닌 실수의 0제곱의 값이 1이 된다는 것도 일반화를 가능하게 하기 위해 도입된

4) 골드바흐 추측 : 골드바흐는 2를 제외한 각 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다는 사실을 관찰하였다. 즉, 4=2+2, 6=3+3, 8=5+3, … , 16=13+3, 18=11+7, … , 48=29+19, … , 100=97+3 등등이다. 이 문제에 관한 진전은 1931년에야 비로소 러시아의 수학자 쉬니렐만이 각 양의 정수는 300,000개보다 적은 소수의 합으로 표시될 수 있다는 것을 보임으로써 이루어졌다. 얼마 후 러시아 수학자 비노그라도프는 n>N인 임의의 정수 n이 네 개 이하의 소수들의 합으로 나타낼 수 있는 양의 정수 N이 존재함을 보였으나, 그 증명에서 N의 크기를 도저히 추정할 수가 없다.
(Howard Eves 지음, 이우영・신항균 옮김, 『수학사』, (서울 : 경문사, 2002), p.535.)

것이다. 때로는 단 한가지 사실을 관찰하고도 일반화를 통하여 놀라운 일반적인 법칙을 발견하기도 한다. 일반화와 반대되는 개념이 특수화이다. 특수화는 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합 또는 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮아가는 것이다. 이러한 특수화는 일반화된 명제를 검증하거나 그 증명 또는 풀이의 힌트를 제공하기도 한다.

## 2. 수학교육의 목적

학교에서 수학 교과를 가르치는 목적은 크게 네 가지로 말할 수 있다.[5)]

첫째, 수학을 배우면 사회 생활을 하는 데나 장차 과학이나 다른 학문을 공부하는 데 도움이 되며, 국가 발전에도 도움이 된다는 것이다. 곧 수학의 실용성 때문이라는 것이다. 실제로, 어떤 수학적 지식은 사회 생활을 하는 데 필수적이다. 사회생활에 직접 소용이 되지 않는 수학적 지식도 수학 이외의 학문을 공부하는 데 필요하다. 당장 이용되지는 않지만, 과학 기술의 발달로 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 있기 때문에 수학의 중요성이 점점 증대되고 있다. 따라서, 언젠가 수학을 이용하기 위해서는 수학을 배워야 한다는 것이 수학의 실용적 목적이다. 그러나 사회 생활에서 필요한 수학은 극히 일부분이며, 수학자나 과학자가 되지 않을 학생도 그렇게 많은 수학을 배워야 하는가 하는 의문이 제기될 수 있다. 또, 어떠한 수학적 지식이 장차 응용될 것인가 그리고 지금 응용되는 수학적 지식이 장래에도 여전히 유용될 것인가 하는 의문이 제기될 수 있다. 그런 점에서 과연 수학의 실용성 때문에 수학을 배우는 것인가 하는 의문이 끊임없이 제기되곤 한다.

둘째, 수학의 도야성을 들 수 있다. 이것은 수학을 배우면 우리의 정신 능력을 신장시킬 수 있다는 것이다. 수학을 배움으로써 신장될 수 있는 능력은 합리적이고 논리적인 사고력, 추상적 사고력, 창의적 사고력, 비판적 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등이다.

5) 교육부, 『중학교 교육 과정 해설(Ⅲ)』, (서울 : 대한교과서(주), 1999), pp.32-33.

이러한 능력은 수학과 관련이 없는 분야에 진출하는 사람에게도 요구되는 정신 능력으로서, 수학을 배워야 하는 강력한 이유이기도 하다. 수학 교육에서 중요한 것은 수학을 하는 방법과 그 경험이라고 할 수 있다. 그러나 어떠한 수학을 통하여 수학을 하는 방법을 가르칠 것인지 과연 수학을 하는 방법이 학습될 수 있는 것인지 하는 의문이 제기되기도 한다.

셋째, 수학의 심미성을 들 수 있다. 기하학적 도형이나 황금 분할 등을 보면 수학적 대상도 아름답다고 할 수 있으며, 또 수학의 공식이나 방법이 절묘하고 아름답게 적용되는 경우도 많이 있다. 그러나 수학의 미적 가치에 대한 견해는 주관적인 요소가 강하기 때문에 수학을 배우는 학생들에게 수학의 심미성을 인식시키기는 매우 어렵다. 그러나 위대한 수학자들은 수학의 아름다움을 인식하였고, 바로 이 아름다움이 그들의 수학 연구에 커다란 원동력이 되었음을 부인할 수 없다.

넷째, 수학의 문화적 가치이다. 즉, 인류가 오래 전부터 오늘날까지 구축해 온 수학이라는 문화는 수용, 전달할 가치가 있다는 것이다. 그러나 그 많은 문화를 전달하는 것이 가능하고 전달할 가치가 있는 것인가 취사 선택하여야 한다면 어느 것을 선택하여 가르쳐야 하는가 하는 의문이 남는다. 위와 같이 수학을 배워야 하는 이유는 여러 가지를 들 수 있으며 그런 한 가지만을 고집하는 것은 잘못일 것이다. 그 시대의 사회, 경제 구조, 철학 등에 따라 어느 한쪽을 강조하기도 하고 무시하기도 하지만, 그 경중은 있되 위의 주장을 종합하는 것이 수학 교육의 올바른 목적이 될 것이다.

결국, 수학을 가르쳐야 하는 이유는 인간과 환경이 관련된 현상을 보는 안목과 수단을 수학의 내용이 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제, 사회, 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리, 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한, 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결함으로써 문제해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고 할 수 있다. 즉 조각상의 무게 중심, 슈퍼마켓에서의 구매, 유전자의 배열, 황금비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 여러 생활 장면에서 만나는 것들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다. 생활과 자연 세계에 담긴 수학적 질서를 수학적 눈으로 파악할 수 있도록 안목을 키워 주는 것이 수학교육의 궁극적 목적일 것이다.[6)]

6) 황혜정외 5명, 『수학교육학 신론』, (서울 : 문음사, 2002), p.54.

# Ⅲ. 수학교육과 수학사

## 1. 수학학습에서 학습동기

교실에서 학생들의 학습 활동을 면밀히 관찰해 보면 주의력을 집중하여 열심히 학업을 수행하고 있는 학생과 그렇지 못한 학생이 있음을 쉽게 찾을 수 있다. 뿐만 아니라 학습 활동에의 학습 의욕도 시간의 흐름에 따라, 학습 과제에 따라, 또는 학습 분위기에 따라 그 강도가 변하고 있음을 느낄 수 있다. 학습활동에의 참여 의욕은 학습자의 지적 활동을 촉진시킬 수 있는 외부의 자극을 어떻게 배열하고 제시하느냐에 따라 좌우된다. 특히 학습 활동의 시발점에서는 학습자의 주의를 끌고 집중하게 하는 일이 중요하다. 주의를 환기시키는 가장 좋은 방법은 학습자의 흥미에 호소하는 일이며, 흥미는 활동의 근원이 되므로 흥미가 없는 활동이나 작업은 학습자에 있어서 의미가 없다.

그러므로 학습자가 학습 목적, 활동, 내용 등에 깊은 흥미를 느끼고 있을 때 비로소 학습은 가장 용이하며 효과가 있는 것이므로, 교사는 이와 같은 점을 충분히 감안하여 지도해야 한다. 즉, 학생의 학습에 대한 흥미 유발은 매우 중요한 것이며, 교사는 학습 내용의 구성과 전개에 있어서 학습자가 흥미를 느낄 수 있는 지도 방법을 동원해야 한다.

홍미(interest)란 재미있어 하고, 하고 싶어하고, 더불어 있고 싶어하고, 더 나아가 미친 듯이 몰입하는 경향성을 말한다. 즉, 홍미란 개인의 주의와 관심이 어느 일정한 활동에 향하고, 그 활동에 대해 좋아하게 되며, 그 활동에 몰입해 버리는 행동경향성이다. 대체로 홍미는 특정 활동에 대한 호・불호(好・不好)의 감정이다. 그래서 특정 학습과제에 대한 홍미는 그 학습과제에서의 성패에 따라 형성되기도 한다. 성공하면 홍미가 더 높아지고, 실패하면 홍미가 더 상실될 수 있다. 따라서 학습과 관련된 홍미는 학습하기 이전에 존재하는 원인변수이기도 하지만 학습의 결과에 따라 생겨나는 결과변수이기도 하다.[7]

수학사는 각 시대의 문화의 양상과 주로 활동한 수학자와 그의 업적, 수학적 성과와 기대적 환경과의 상호관계, 그 성과가 미치는 영향과 그 변천 과정들을 계통적・발생적으로 연구하는 경향이 두드러지게 나타나고 있다. 그러므로 우리는 수학사의 연구를 통하여 수학의 본질과 수학적 이상을 달성시키는데 필요한 수학적 방법을 쉽게 이해 할 수 있으며, 수학과 그 이외의 분야 즉 정치, 경제, 사회, 문화, 사상, 종교와의 관계를 깊이 인식함으로써 보다 비판적인 위치에서 역사를 관망할 수 있으며, 수학사의 내용은 평범하기는 하지만 수학 전반에 걸친 다양한 내용이 취급되고 있으므로 각 부분과 상호간의 관계를 계통적으로 이해 할 수 있다.
(오진곤, 1997)

7) 조영일, 『새로운 접근의 교육학 개론』, (서울 : 교육과학사, 2003), p.226.

동기란 사람들이 어떤 일을 하는 이유를 지칭하는 개념으로, 동기의 크기는 학습할 내용이 갖는 가치에 비례한다고 알려져 있다. 그러므로 교사는 학습 활동의 가치를 학생이 알게 하고, 학습 활동에 적절한 노력을 하면 성공할 수 있음을 학생에게 알려주어야 한다. 수학사는 수학의 이용 가치뿐만 아니라, 과거 수학자들이 수학의 발견에 보인 열정을 보여줌으로써 학생들에게 수학 학습 활동의 가치를 알도록 유도할 수 있다. 인간에게는 자신의 뿌리를 찾으려는 본능적인 욕구가 있으므로, 수학시간에 수학사를 언급함으로써 수학에 대한 학생들의 흥미와 관심을 자연스럽게 유발 할 수 있다.

## 2. 수학사 지도의 교육적 의의

수학은 매우 어렵고 재미없는 과목이라는 평판을 받고 있고, 다른 영역보다 성취수준이 크게 떨어진다는 사실은 충격적이다.[8] 수학학습에 있어 문제해결만을 강조하여 기교적인 방법만을 가르칠 때, 수학에 대한 가치와 필요성을 모르고, 수학의 아름다움이 사라져 위와 같은 무서운 결과를 초래할 수 있는 것이다. 그러므로 수학의 가치와 필요성에 대한 강조와 계속적인 수학 학습을 유도하기 위해서는 관심과 흥미를 유지시키는 방안이 마련되어야 한다. 수학의 지도에 수학사(수학의 일화 포함)를 이용하는 것은 학생들이 수학을 재미있게 공부하고 수학이 특수한 몇 사람의 소유물이 아니며, 평범한 사람도 살아가는 중에 수학적인 아이디어를 찾을 수 있고, 이들을 조직화하여 다시 실생활에 유용하게 활용할 수 있다는 확신을 갖도록 하기 위한 것이다. 그리고 수학을 실생활과 무관한 학문이라고 생각하는 학생들에게 인간적으로 살아간 수학자들의 생활상을 알게 함으로써 수학에 대한 친근감을 갖도록 할 수 있다. 수학은 책 속에 활자화된 무미건조하고 딱딱한 이야기만은 아니다. 수학의 장구한 역사는 수학의 존재 가치와 중요성을 대변한다. 수학사에는 인간의 줄기찬 노력, 실패와 성공, 고통과 환희의 이야기가 있다. 수학사는 분명히 수학교육에 활용할 만한 충분한 가치가 있는 것이다.

---

8) 서울시 교육청이 지난 3월초 서울 초등학생 4~6학년생 38만 명을 대상으로 기초학력진단평가를 실시한 결과 수와 연산, 도형, 측정 등 기초수학 분야를 어려워하고 많이 틀리는 것으로 나타났다. 영역별 성취수준 미달 학생 가운데 기초수학이 부족한 학생은 8158명으로, 읽기(5129명)나 쓰기(4504명)보다 월등히 많았다. 실생활과 연결할 때 홍미 많은 아이들이 수학을 싫어하고 어려워한다. 이번 조사결과에서 드러났듯이 다른 영역보다 성취수준이 크게 떨어지는 아이들도 많다. 하지만 수학은 모든 학문의 기초다. 논리력과 창의력을 키우는 근간이다. 때문에 수학의 중요성은 결코 포기할 수 없다. (한겨레 2003-04-13)

Fauvel과 Freudental의 말을 인용하면, 수학사를 수학 교육에 이용하면 일반적으로 다음과 같은 이점이 있다고 한다.[9)]

첫째, 알고리즘적인 계산 수학에서 벗어나 개념적 사고를 고취하는데 이용할 수 있다.

둘째, 교육과정 구성에서 '자연스러운' 내용 배열의 준거가 되며, 학습-지도에서 수학적 아이디어의 발달 과정을 따름으로써 자연스럽게 그 이해를 도울 수 있다.

셋째, 수학의 역사적 발달 과정에 소급해 봄으로써 수학적 사고의 인간적인 모습을 접해 보게 하여, 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 생기를 불어넣을 방안을 찾을 수 있다.

넷째, 현대 기술 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 수학의 문화적인 역할, 특히 인간관과 세계관 형성에 미친 수학의 역할을 이해함으로써 수학에 대한 학생들의 인식을 바꿀 수 있다.

9) 우정호, 『학교 수학의 교육적 기초』, (서울대학교출판부, 2002), pp.41-42.

## 3. 수학사 도입

수학사는 수학의 이해를 돕는 수단이 된다.

많은 수학자 또는 수학교육 학자들이 수학사를 수학교육에 접목시킴으로써 수학 수업의 목표에 보다 효율적으로 도달할 수 있다는 주장을 펴왔다. 우선 수학이 발전해 온 과정을 역사적으로 고찰함으로써 학생으로 하여금 일반화, 추상화 등의 수학의 본질에 관해 더욱 깊은 이해를 할 수 있게 된다는 것으로‘ 보편화된 개념에 대해 구체적이고도 세세하게 그 역사적 과정을 추적하는 것은 일반화와 추상화의 본질과 역할을 이해하도록 가르치는 최선의 길이다.’ 라고 하였다. 또한 통상적인 수업과는 달리 수학을 역동적 과정으로서 인식할 수 있도록 한다는 것으로‘ 전통적인 수학 교수-학습은 역사적 과정이 끝나는 지점에서 시작함으로써 그 분야를 이해하는 게 어려워진다.’ 고 분석하기도 하였다.

수학사 학자 Boyer는 키케로[10]의 말을 인용하여 “네가 태어나기 전에 어떤 일이 일어났는지를 알 수 없다는 것은 영원히 어린아이로 남아있다는 것을 뜻한다.” 고 말하면서 인식 수준의 성장을 위해서도 역사적 고찰은 반드시 필요함을 역설하였다. 이밖에 수업에 적합한 모델을 교사에게 제공할 수 있는 이점이 있다는 것으로 수학사에 대한 이해를 토대로 교사가 수업 준비를 할 때 수학을 조직하고 표현하는 다양한 방법을 마련할 수 있다는 근거를 들기도 한다.

---

10) 키케로(B.C.106-B.C.43) : 로마의 웅변가, 정치가, 철학자. 그의 정치적 지조는 비난받을 데도 있으나, 위대한 웅변가로서, 또 그리스 철학을 라틴어로 번역하고, 고전문화에 대하여 이룩한 공헌은 불멸의 것이다. 주요한 저작에‘ 국가론’,‘ 법률론’, ‘ 의무론’ 외에도 허다한 저술을 남겼으며, 또한 그의 연설로서 현존한 것이 58편이 있다.

수학사에 대한 고찰은 수학뿐만이 아니라 문화적 배경에 대한 교육에도 많은 영향을 준다.‘ 문화적인 배경은 왜 특정 시대에 특정한 방향으로 수학적 개념이 발달했는지를 보여준다.’ 한 예로 초기의 수학이 주로 고대 오리엔트의 지역에서 농업이나 토목, 건축과 같은 일에 필요한 실용적인 과학으로서 발생하였고, 그러한 일을 위해서는 측량법을 개발해야 했고 또 거래의 목적이나 세금을 부과하고 징수하는데 필요한 회계 업무의 발전이 필요하였다는 점이다.[11] 역으로 수학사에 대한 연구는 일반 역사가들이 통상 잊어버리는 문화적 배경이 되는 사실을 조명한다.

‘수학은 우리 문화를 구성하는 데 빠뜨릴 수 없는 부분이며 수학사를 가르치지 않으면 수학이 무엇인지에 대하여 부정확한 개념을 심어줄 수 있다. 수학사는 정치사, 과학사, 예술사 등처럼 반드시 가르쳐야 한다.’ 그리고 수학은 우리 문화의 구성 요소이며, 역사적 고찰 없이는 파악할 수 없는 문화적 현상이라는 주장으로 수학사 학자 Scriba는 “‘ 수학사를 수학 수업을 위해 활용할 수 있는지를  묻는 것은 잘못된 것이다. 오히려 수학사 없는 수학을 생각할 수 있는가?’ 라고 질문을 던져야할 것이다. 모든 것은 다음의 대답에서 비롯된다. 역사 없는 수학은 결코 있을 수 없다.’ ” 고 수학사의 도입을 강력하게 역설하고 있다.

수학은 발생 원리적 방법으로 조직되어야 한다.

유럽을 비롯한 서구 여러 나라에서는 70년대 중반부터 수학사를 교육적 측면에서 고찰하여 이를 수업에 활용하고자 하는 경향이 강해졌는데, 그

11) Howard Eves 지음, 이우영·신항균 옮김, 『수학사』, (서울 : 경문사, 2002), pp.25-26.

배경으로는 1960년대이래 부르바키 학파[12)]의 영향으로 진행된 수학 교육 개혁 운동인‘ 새수학(New Math)’ 에 대항하는 움직임이었다. 1970년대 초부터 진행된 수학 교육 개혁 운동인‘ 새수학’ 은 부르바키의 모구조를 근거로 하여 일반적인 개념을 가급적 이른 시기에 도입하여야 한다는 게 골자였다. 그 결과 수학적 개념의 상대화와 변화가 애초부터 어렵게 되어 수학을 정적이고도 역사와는 무관한 교과로 여기게 되고 만다는 비판이 제기되었다. 수학수업에 역사적 요소를 도입하는 이론적 근거로 흔히 제시되는 것이‘ 새수학’ 에 대항하는 교수학습원리로서 대두된 발생원리로서 이미 20세기 초반에 클라인(Felix Klein)[13)]이 제기했었다. 클라인은 발생원리의 근거를 헤켈(Ernst Haeckel)[14)]의 생물발생원리의 기본법칙에서 찾았다.
예컨대‘ 일반적인 함수 개념의 지도에서 오일러의 관점을 적용할 수 있으므로 추상적인 정의가 아니라 오일러가 다수 예시한 기본적인 경우를 가지고 도입하여야 함’ 을 강조하였다. 교사가 배경 지식을 풍부히 가지고 있으면서 적절한 때에 적절한 방식으로‘ 역사’ 를 연계시켜 수업을 진행하는

12) 부르바키 학파 : 50~60년대의 패러다임이었던 부르바키 학파의 사상은 이전 세대 수학자들이 관심을 가진 모든 특별한 경우를 유도할 수 있는 일반론을 정하는 것이 목표였다. 이것은 통일되고, 일반적이고 매우 추상적인 구조로서 수학의 정확성과 응용의 다양성, 그리고 효율성을 높이고자 한 것이었다. 그러나 수학자들은 부르바키의 암호를 해독할 줄 알았지만 나머지 세인은 그렇지 못했다. 이로 인해 60년대 말까지 수학은 다른 분야 특히 물리와 의사소통이 되지 못하였으며 또한 특수한 예나 이론을 무시하는 경향을 갖게 되었다.

13) 클라인(1849~1925) : 영국의 페리와 함께 금세기 초 근대화 운동의 창시자가 됐다. 그는 「수학 교육의 목표는 함수 개념의 양성에 있다.」고 했는데 이것은 근대화의 성격을 단적으로 표현한 것이다. 당시 유클리드를 그대로 교과서에 사용하는 중세기적 수학 교육을 실시하던 영국에서 페리는 이것을 대신해 근대 수학의 중심인 함수와 좌표를 가르칠 것을 주장해 근대화 운동의 불씨를 당겼다. 이어서 클라인은 함수를 수학교육의 주요 목표로 끌어 올린다. ( 일본수학 SEMINAR 편집부 원저, 류시규 역자, 『100인의 수학자』 (서울 : 의제, 2000), p.152. )

14) 헤켈(Ernst Haeckel)의 생물발생원리 : 개체 발생은 계통 발생을 재현한다는 것으로 낮은 단계의 인식 수준을 가진 어린 시절부터 고도의 추상화를 할 수 있는 성인이 되는 과정에서 역사적 발달 과정과 유사한 진행을 보이므로 수학 수업은 발생적 방법에 따라 조직되어야 한다는 것이다.

것이야말로 더욱 바람직하다.

Toeplitz의 *Die Entwicklung der Infinitesimalrecbnung* (무한소 계산의 발달)은 역사 발생적 원리에 따라 전개된 최근의 대표적인 수학교과서이다. Toeplitz는 수학 교사 교육에서 중요한 것은 역사적 사실의 전달이 아니라 수학과 수학적 방법의 특성에 대한 바른 파악, 곧 태도의 전달이라고 보았으며, 수학의 역사적 발달의 논리를 교수학적으로 번역할 수 있기를 바랐다. 그는 두 가지 실천 방안을 제기하였는데, 하나는 희극화를 통해 학생들이 직접 발견하도록 안내하여 문제, 개념 및 사실을 발생시키는 것으로 그는 이것을 직접적인 발생적 방법이라고 불렀다. 다른 하나는 역사적인 분석을 통하여 모든 개념의 독특한 의미, 그 실제적인 핵심이 무엇인가를 학습하여 그러한 개념의 교수를 위한 결론을 이끌어내는 것으로 그는 이것을 간접적인 발생적 방법이라고 불렀다. 그에게 있어 교육적으로 중요한 것은 단순한 수학의 역사가 아니다. 그는 수학적인 문제, 사실, 증명의 발생과 결정적인 계기의 교육적인 가치를 중시하였으며, 수학의 역사적 발달의 논리를 교수학적으로 번역하고자 하였다.15)

허민은 수학교육에서의 수학사 지도의 필요성을 다음과 같이 적고 있다.

첫째, 수학의 유용성을 강조할 수 있다. 수학을 왜 배우냐고 묻는 학생에게 수학사를 통해‘ 수학은 필요에 의해 발생했다.’ 는 점을 확신시킬 수 있는 것이다.

둘째, 수학은 발전하는 학문임을 인식시킬 수 있다. 수업 중 수학사의 도입은 수학이 계속해서 변해왔고 현재도 발전하고 있으며 앞으로도 더욱 발

15) 우정호, 『학교 수학의 교육적 기초』, (서울대학교 출판부, 2002), p.57.

전할 것이라는 생각을 심어줄 수 있다.

셋째, 수학의‘ 인간화’ 를 도모할 수 있다. 부력의 법칙을 발견하고 시라쿠사 거리를 발가벗고 뛴 아르키메데스(Archimedes)[16], 역경 속에서도 연구를 게을리 하지 않은 아벨(N. H. Abel)[17]과 갈루아(E. Galois)[18]의 이야기는 성공의 환희와 함께 인간의 불굴의 의지를 보여주는 교훈적인 사례이며 학생들에게 감동을 줄 수 있다.

넷째, 현대수학을 좀 더 친밀하게 이해시킬 수 있다. 현대수학은 공리적 방법으로 체계화되어 대단히 추상적이고 엄밀하게 전개된다. 중등학교에서 가르치고 있는 수학도 이런 추세를 따르고 있으며, 조작보다는 개념의 이해를 강조하고 있다. 따라서 학생들은 수학에 대한 거부감이 심화되고, 수학의 논리적 구조를 파악하는 데 실패한 학생은 수학 학습을 포기할 수도 있다. 이런 경우 수학사는 현대수학의 구조에 대한 이해를 제공해 줄 수 있다.

다섯째, 수학의 문화적 가치를 인식시킬 수 있다. 수학을 가르치는 이유 중 중요한 하나가 수학의‘ 문화적 가치’ 이다. 수학교사는 수학이라는 인

---

16) 아르키메데스(B.C.287-B.C.212) : 고대 그리스의 수학자·물리학자

17) 아벨(1802-1829) : 노르웨이 수학자. 가난한 목사의 아들로 태어나, 18세 때 아버지를 잃고 가난과 싸우면서도 수학공부에 뜻을 두었다. 19세 때에는 그때까지 약 3세기 동안 수학상의 어려운 문제로 남아 있던 5차방정식의 대수적 일반해법 연구하여, 그 불가해성을 증명하여 가우스에게 보냈으나, 가우스는 그것을 읽어보지도 않고 쓰레기통에 버렸다고 한다. 그러나 계속된 연구로 그의 이름은‘ 아벨의 적분’ ,‘ 아벨의 정리’ ,‘ 아벨방정식’ ,‘ 아벨군(群)’ 등 오늘날 사용되고 있는 많은 수학용어 속에 살아 있어, 수학계 불후의 인물로 기억되고 있다.

18) 갈루아(1811-1832) : 프랑스 수학자로써, 군(群)의 개념을 처음으로 고안하였고,‘ 갈루아의 이론’ 으로도 유명하다. 방정식론에 관한 연구 결과도 프랑스 학사원에서 등한시되었으나, 그가 죽은 후, 친구인 A.슈발리에에게 보낸 유고에서 비로소 그 위대성이 알려졌다. 유고에는 타원적분과 대수함수의 적분에 관한 것, 방정식론에 관한 것이 요약되어 있다. 그 내용에는 군(群)의 개념 도입이나 갈루아 이론의 본질적인 부분이 포함되어 있다. 갈루아의 사상에 포함된 군의 개념은 기하학이나 결정학에도 응용되었고, 물리학에도 풍부한 연구수단을 제공하였다.

류 문화의 전달자이며, 이런 문화를 학생들에게 전달하는 것은 교사의 책임이다.

여섯째, 수학학습의 어려움을 이해시킬 수 있다. 수천 년 동안 인류의 시행착오와 끊임없는 노력의 결과로 현재의 수학이 존재하고 있음을 알게 한다.

일곱째, 교수방법을 개선시킬 수 있다. 그 단원의 역사적 배경에 대한 설명은 학생들에게 수학의 발전과정을 인식시키고 학습효과를 올릴 수 있다.

여덟째, 수학에 대한 흥미를 유도할 수 있다. 수업중 간단한 역사적 사실과 일화를 소개함으로써 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있다.

# Ⅳ. 피보나치 수열

## 1. 수열의 정의

### 가. 수열이란 무엇일까?

수열은 어떤 일정한 규칙에 따라 유한개나 무한개의 수의 항을 배열한 것이다. 예를 들면, $1,4,7,10,13,\cdots$은 수열이며, $8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$도 수열이다. 수열 $1,4,7,10,13,\cdots$에 있어서의 법칙은 각 수가 앞의 항의 수에 3을 더함으로써 얻어진다는 것이다. 수열 $8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$에 있어서의 법칙은 다음 항의 수를 얻기 위해 각 수를 2로 나눈다는 것이다.
수열 $1,4,9,16,25,36,\cdots$에 있어서의 법칙은 수 1, 2, 3, 4, 5, 6,…를 연속적으로 제곱하는 것이다. 위의 처음 두 수열을 각각 등차(arithmetic) 수열[19], 등비(geometric) 수열[20]이라고 부른다.

### 나. 역사 속에서의 수열

수열에 관한 연구는 그리스 시대의 수학으로부터 비롯되었다. 일상생활

19) 등차수열(arithmetic sequence) : 첫째항에서 시작하여 일정한 수를 더하여 얻은 수열로써 이웃한 두 항 사이의 차가 같다는 것에 주목하여‘ 두 항 사이의 차가 항상 같은 수열’ 이라는 의미에서 등차수열이라고 한다.
20) 등비수열(geometric sequence) : 첫째항에서 시작하여 차례로 일정한 수를 곱하여 얻은 수열로써 이웃한 두 항 사이의 비가 같다는 것에 주목하여‘ 두 항 사이의 비가 항상 같은 수열’ 이라는 의미에서 등비수열이라고 한다.

의 여러 현상과 수량의 일정한 규칙을 가지고 있을 때 수열로 나타내어 생각하면 편리하다. 수열에 관한 가장 오래된 기록으로는 이집트 파피루스에 나오는 곡물을 분배하는 문제로 알려져 있으며, 고대 바빌로니아나 고대 중국의 산서 중에서도 발견되었다.

피타고라스(Pythagoras B.C.527?-492?)학파21)는 홀수를 1부터 제 n번째의 홀수 2n-1까지 합을 증명하였으며 이를 그림으로 확인하였다.
그는 또 삼각수, 사각수를 연구하였다.
그리고,

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

를 증명하였다. 피타고라스와 그의 제자들은 등차수열, 등비수열은 물론, 그 외의 수열에 대해서도 상당한 업적을 남겼다.

13세기에는 이탈리아의 수학자 피보나치(Fibonacci)에 의해서 항 사이의 관계가 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$로 주어지는 피보나치 수열이 만들어졌다.
즉, 피보나치 수열은 3부터( $a_1=1$, $a_2=2$ ) 연속되는 각 수는 바로 앞의 두 수의 합으로 주어지는 $1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$를 말한다.

---

21) 피타고라스 학파 : BC 6세기 전반에 크로토네에서 피타고라스가 창설한 고대 그리스 철학의 한 파이다. 수학과 여러 과학(수학・천문학・음악이론)에 업적을 남긴 연구단체이기도 하고 동시에 연구생활을 통한 혼의 정화・구제를 목적으로 하는 종교단체이기도 하였다. 수학적인 우주론을 구상하고‘ 만물은 수에서 이루어진다’ 고 주장하였다. 즉, 우주는 한과 무한의 두 원리로 이루어진‘ 아름다운 조화가 있는 전체(cosmos)’ 이며 이 조화와‘ 형’ 을 주는 것이 수의 비례(로고스)라고 하였다. 이로 인하여 그들은 형상원리(formal principle)의 발견자로 불린다.

## 2. 피보나치의 생애 (Leonardo Fibonacci 1170?-1250?, 이탈리아)

피사(Pisa)의 레오나르도(Leonardo)라고도 알려진 피보나치(Fibonacci)[22]는 피사의 상업 중심지에서 태어났으며 아버지는 상업과 관련된 일에 종사하고 있었다. 당시 이탈리아의 큰 상인들은 지중해 연안의 여러 곳에 상점을 두고 있었는데 그의 아버지가 관세 관리인으로 아프리카의 북부 연안에 위치한 보기(Bougie)에서 근무하게 되었고 어린 레오나르도는 그 곳에서 교육을 받게 되었다. 아버지의 직업 때문에 소년시절부터 일찍이 산술에 흥미를 느끼기 시작했으며 이후 이집트, 시칠리아, 그리스, 시리아 등으로 여행을 하면서 동부와 아라비아의 수학을 접하였다.

인도-아라비아의 계산술의 실용적 우수성에 완전한 확신을 가지게 된 피보나치는 1202년에 고향으로 돌아와서 인도-아라비아 숫자를 사용하는 방법을 설명한 <산반서(Liber abaci)>를 저술하였는데 이 책에서는 가감승제와 문제 풀이 방식 더 나아가 대수학에 대한 설명을 포함하고 있다. 피보나치는 계산과 관련된 모든 분야에서 인도-아라비아 수 체계를 택할 것을 열성적으로 주장했다. 주판을 사용해서 그 결과를 로마 숫자로 기록하는 것을 더 좋아했던 사람들로부터 인도-아라비아 수 체계에 대한 많은 반대도 있었다. 1299년 말까지도 플로렌스(Florence)의 은행원들에게는 인도-아라비아 수를 사용하는 것이 용납되지 못하고, 로마 수 체계를 사용해야만 했다. 그러나 새로운 수 체계는 점점 인기를 얻었고, 아마 피보나치의 열성과 명성이 그것을 사용하게 하는 데 도움을 주었을 것이다.

---

22) Howard Eves지음, 이우영·신항균 옮김, 『수학사』, (서울 : 경문사, 2002), pp.229-231.

<산반서(Liber abaci)>는 산술과 초등대수에 관하여 쓴 것으로 15장으로 되어 있는데 인도-아라비아 수를 읽고 쓰는 법부터 시작한다. 그리고 나서 정수뿐 아니라 분수까지 적용되는 기본적인 산수계산을 포함하는 문제에서 이들 수의 사용에 관한 장이 나온다. 그 다음에 상업적인 문제, 제곱근, 세제곱근, 대수 그리고 마지막으로 측도문제 등이 있다. 이 내용은 인도와 아라비아 저작의 내용과 비슷하다. 또 이 책에는 많은 문제가 실려 있는데 이 중 후세에 가장 영향을 미친 것이 “한 쌍의 새끼 토끼로부터 1년간에는 모두 몇 쌍의 토끼를 갖게 될 것인가?”라는 문제가 유명한 「피보나치 수열」인 것이다. 최초의 두 항 이후의 항은 모두 앞선 두 항의 합으로 되어 있다. 이 수열은 아름다울 뿐만 아니라 중요한 성질을 많이 가지고 있다. 연속하는 두 항은 모두가 서로 소의 관계에 있으며 황금비가 된다. 이 밖에 이 수열은 엽서(葉序)-잎이 나오는 순서-라든지 생물의 성장 문제에도 응용할 수 있다.

후에 피보나치는 기하, 삼각법, 그리고 오늘날 소위 디오판투스 해석학에 관한 몇 권의 책들을 썼다. 그의 책들은 그 당시의 학자들에게는 너무 어려워서 그의 재능에 대한 인식은 널리 받아들여지지는 못했다. 황제 프리드리히 2세 (Frederick Ⅱ)는 그의 후원자였는데, 수학 콘테스트에서 겨루도록 그를 궁전에 초대하였다. 그는 매우 성공적으로 하였지만, 어떻게 해서 답을 얻었는지는 밝혀지지 않았다. 피보나치는 매력적인 성격을 가졌을 뿐만 아니라, 동시대 사람들 중에서는 출중했다.

## 3. 피보나치 수열의 특성

### 가. 피보나치 수열의 유래

<문제> 다음 □안에 알맞은 수는 무엇입니까?

$$1 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 8 \to 13 \to 21 \to \square \to \cdots$$

답은 얼마일까요?

예, 34입니다. 그럼 어떻게 이 문제를 해결했나요?

이와 같이 수를 일정한 규칙대로 배열한 것을 수열이라고 하는데 위의 경우처럼 앞의 둘을 더한 수가 다음 수가 되도록 배열한 수열을 피보나치 수열이라고 한다. 피보나치가 전해 내려오는 토끼 이야기를 자신의 '산반서' 라는 책에 소개했기 때문에 피보나치 수열로 부르게 되었다.

피보나치가 1202년에 연구했던 원래 문제는 토끼가 이상적인 상황에서 얼마나 빨리 번식할 수 있는가에 대한 것이었다. 토끼 이야기를 살펴보면 다음과 같다. 『태어난 암수 두 마리의 토끼가 들판에 놓였다고 하자. 토끼들은 한 달 후에 성장하여 두 달의 끝 부분에서 암컷이 한 쌍의 토끼를 낳는다. 토끼들이 결코 죽지 않고, 암컷은 항상 암수 한 쌍의 새끼를 둘째 달부터 계속해서 낳는다고 하면 1년 후에는 얼마나 많은 토끼가 들판에 있을까?』[23]를 생각한 것이 피보나치 수열 연구의 시초이다.

---

23) 박규홍외 5명, 『수학 I 』, (서울 : (주) 교학사, 2004), p.136.

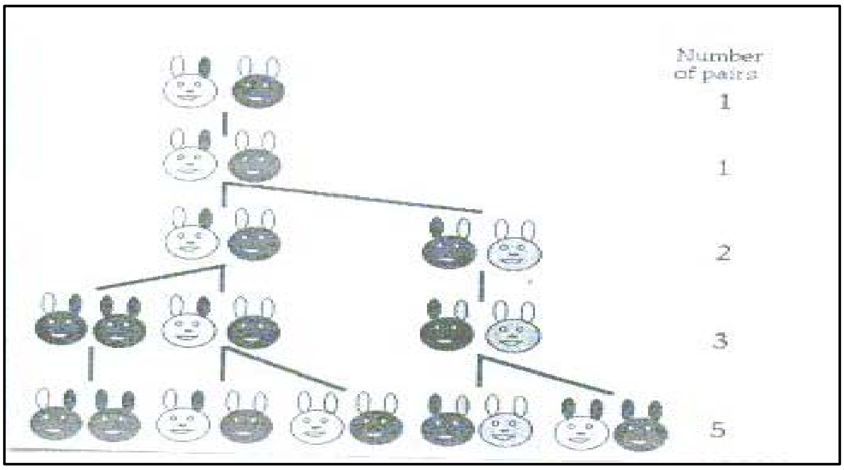
[그림 1]을 참고로 생각해 보자.

① 첫 달 후에 그들이 짝을 짓지만 여전히 한 쌍만 있다.

② 둘째 달 후에 암컷은 한 쌍의 새끼를 낳아, 모두 두 쌍의 토끼가 된다.

③ 셋째 달 후에 원래 암컷은 두 번째 한 쌍의 새끼를 낳으므로 모두 합쳐서 3쌍이 된다.

④ 넷째 달 후에 원래 암컷은 또 다른 한 쌍의 새끼를 낳았으며 두 달 전에 태어난 암컷이 역시 첫 번째 새끼를 낳으므로 다섯 쌍이 된다.

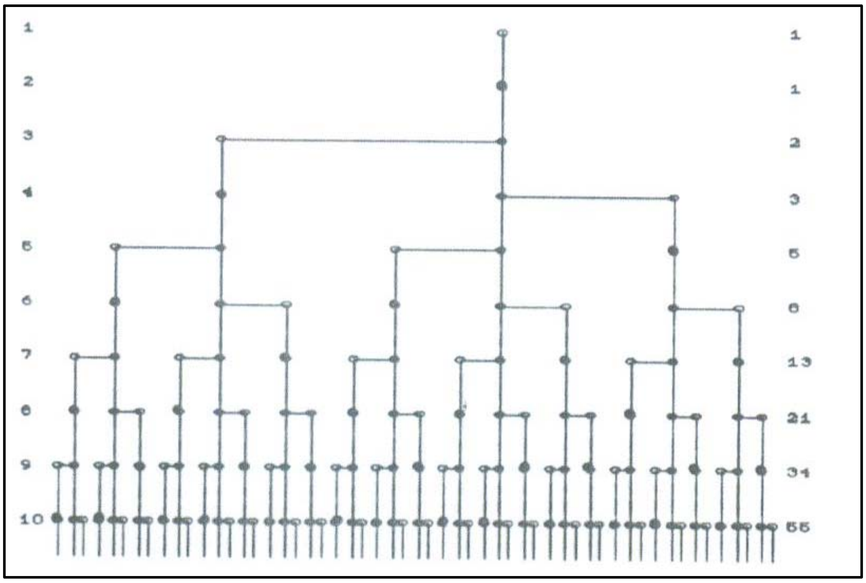



[그림 1] 월별 번식하는 토끼

들판에 있는 토끼 쌍의 수는 매달 초에 1,1,2,3,5,8,13,21,34,…이 된다.

이 토끼의 문제는 현실적인가? 이 문제는 비현실적인 점을 갖고 있다. 토끼는 절대로 죽지 않는다는 것과 각 세대가 정확히 암수 한 마리씩 두 마리라는 것이다. 또한 남매가 짝짓는 것은 유전학적으로 여러 문제를 일으킬 수 있다. 현실적으로는 불가능하지만 우선은 수열에만 관심을 갖도록 하자.

다음 [그림 2]와 <표 1>은 토끼의 가계도와 월별 토끼 집단의 성장 표이다.




[그림 2] 토끼 집단의 가계도

<표 1> 월별 토끼 집단의 성장표

| 달 | 성인 토끼(쌍) | 어린 토끼(쌍) | 전체 쌍의 수 |
|---|---|---|---|
| 1월 | | 1 | 1 |
| 2월 | 1 | | 1 |
| 3월 | 1 | 1 | 2 |
| 4월 | 2 | 1 | 3 |
| 5월 | 3 | 2 | 5 |
| 6월 | 5 | 3 | 8 |
| 7월 | 8 | 5 | 13 |
| 8월 | 13 | 8 | 21 |
| 9월 | 21 | 13 | 34 |
| 10월 | 34 | 21 | 55 |
| 11월 | 55 | 34 | 89 |
| 12월 | 89 | 55 | 144 |

## 나. 피보나치 수열의 성질

### 1) 피보나치 수열의 일반항

피보나치 수열의 일반항을 구해보면, 다음과 같다.

<문제> 수열 $a_n$은 다음을 만족시킨다. 일반항 $a_n$을 구하여라.

$$a_1 = a_2 = 1\ , \qquad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

<풀이>

$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ 에서 특성 방정식을 생각하자.

$x^2 - x - 1 = 0$ 의 해를 구하면,

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

1) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ 의 제 1변형

$(a_{n+2} - x_1 a_{n+1}) = x_2(a_{n+1} - x_1 a_n)$

그러므로, $a_{n+1} - x_1 a_n$ : 등비수열

따라서,

$$a_{n+1} - x_1 a_n = (a_2 - x_1 a_1)(x_2)^{n-1} \cdots\cdots ①$$

2) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ 의 제 2변형

$(a_{n+2} - x_2 a_{n+1}) = x_1(a_{n+1} - x_2 a_n)$

그러므로, $a_{n+1} - x_2 a_n$ : 등비수열

따라서,

$$a_{n+1} - x_2 a_n = (a_2 - x_2 a_1)(x_1)^{n-1} \cdots\cdots ②$$

①-②를 하면,

$$a_{n+1} - x_1 a_n = (a_2 - x_1 a_1)(x_2)^{n-1}$$

$$- \quad \underline{a_{n+1} - x_2 a_n = (a_2 - x_2 a_1)(x_1)^{n-1}}$$

$$(x_2 - x_1) a_n = (a_2 - x_1 a_1)(x_2)^{n-1} - (a_2 - x_2 a_1)(x_1)^{n-1}$$

$$= \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$- \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot 1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

그러므로,

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$-\sqrt{5}\, a_n = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

따라서,

피보나치 수열의 일반항은

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$ 이다.

### 2) 피보나치 수열의 성질

피보나치 수열을 살펴보면 여러 가지 재미있는 성질이 있다.

첫째, 이어지는 두 숫자들을 합하여 나가면 그 다음 숫자가 된다.

즉, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$의 수열은 $3+5=8$, $13+21=34$, $55+89=144\cdots$로 이루어진다는 것이다.

둘째, 피보나치 수열에서 연속된 두 항의 비(뒷 수와 앞 수의 비)를 살펴보자. 즉, $n$번째 수를 $(n+1)$번째의 수로 나누어 보면

$$\frac{1}{2}=0.5 \qquad \frac{3}{5}=0.6$$

$$\frac{8}{13}=0.6153846\cdots \qquad \frac{21}{34}=0.617647\cdots$$

$$\frac{55}{89}=0.6179775\cdots \qquad \frac{144}{233}=0.6180257\cdots$$

위에서 보는 바와 같이 비의 값이 아래로 갈수록 점점 $0.6180339\cdots$에 가까워지는 것을 볼 수 있다. 실제로 피보나치 수열에서 항이 커지면 커질수록 연속된 두 항의 비가 $0.6180339\cdots$ $(=\frac{\sqrt{5}-1}{2})$에 점점 가까워진다는 것을 알 수 있다. 이것이 바로 ‘황금비(黃金比)’[24]이다. 따라서, 피보나치 수열과 황금비 사이에는 서로 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. 이러한

---

24) 황금비(黃金比) : 황금비는 가로와 세로가 1:1.618 의 비례를 갖는다. 즉, 가로와 세로가 약 5:8 로 나누어지는 비례가 황금비인 것이다. 황금비는 가장 아름다운 조화를 이루는 비례로서 그러한 비율로 나누어진 형상은 균형 잡힌 느낌을 준다. 「신곡」이라는 문학 작품으로 널리 알려진 세계적인 문호 단테는 황금비를 다음과 같이 격찬했다. “황금비는 신이 내린 최고의 걸작품이다!” ( 송은영, 『재미있는 수학상식』, (서울 : 맑은창, 2001), pp.141-142.)

황금비는 고대 피타고라스 학파에서도 찾아 볼 수 있다.[25]

셋째, $(n+2)$번째 수를 $n$번째 수로 나누어 보자.

$$\frac{5}{2}=2.5 \qquad \frac{21}{8}=2.625$$

$$\frac{89}{34}=2.6176\cdots \qquad \frac{144}{55}=2.61818\cdots$$

위에서 보는 바와 같이 점점 2.618에 접근한다.

넷째, 1.618의 역수는 0.618이며, 2.618의 역수는 0.382이다.

다섯째, 두 숫자의 비율을 나타내는 1.618, 0.618 그리고, 2.618, 0.382의 관계에서 다음과 같은 사실들을 살펴볼 수 있다.

$$1.618\times0.618=1 \qquad 2.618\times0.382=1$$

$$2.618-1.618=1 \qquad 1.618-0.618=1$$

$$1-0.618=0.382 \qquad 0.618\times0.618=0.382$$

$$1.618\times1.618=2.618 \qquad 2.618\times0.618=1.618$$

25) 고대 피타고라스 학파는 정오각형 안에 미의 기본인 황금비가 있는 것을 발견하고 정오각형으로 만들어진 별을 그들의 심볼마크로 만들어 자랑스럽게 가슴에 달고 다녔다. 정오각형의 한 대각선이 다른 대각선에 의해 분할될 때 생기는 두 부분의 길이의 비가 황금비가 됨을 발견했던 것이다.

# 4. 피보나치 수열의 발견과 응용

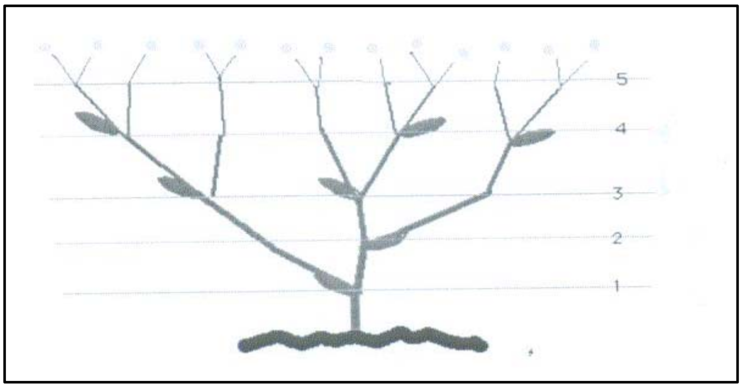
## 가. 자연현상 속의 피보나치 수열

### 1) 식물의 가지와 잎의 배열

가) 식물의 가지

특별한 어떤 식물은 생장점의 수에서 피보나치 수가 나타난다. 식물이 새로운 가지를 뻗을 때, 그 가지는 두 달을 자라야 분지를 지탱할 만큼 충분히 강해진다고 가정하자. 그 후로는 매달 생장점에서 가지를 뻗는다고 가정하면, 여기에서 보여지는 것과 같은 그림([그림 3])을 얻게 된다.

처음에 한 가지가 두 개로 나뉘어진다. 이들 두 가지 중 새로 난 가지가 다시 두 개로 나뉘어지는 동안 다른 것은 나뉘어지지 않고 있다. 하나가 가지를 나누면 다른 가지는 쉬는, 이러한 현상은 각 가지가 생길 때마다 반복된다. 이 때 수평 방향에 있는 가지의 수는 피보나치 수를 이루는데, 이러한 과정은 제한된 환경적인 영향을 필요로 하는 것이어서 완벽한 실례를 찾기는 힘들다. 그러나 물 속 말류 들이나 뿌리 구조 속에서 이러한 패턴이 나타나기도 한다.



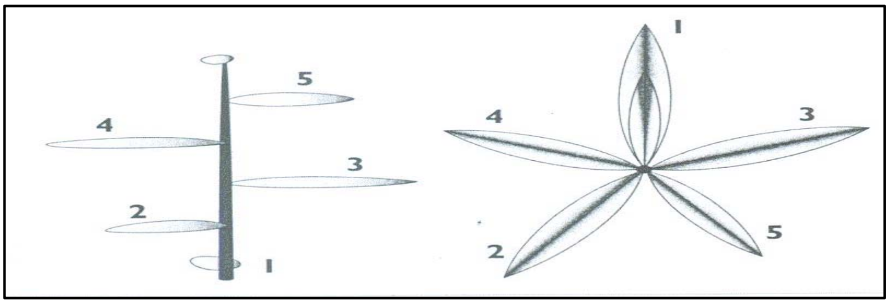

[그림 3] 식물의 가지

나) 잎의 배열

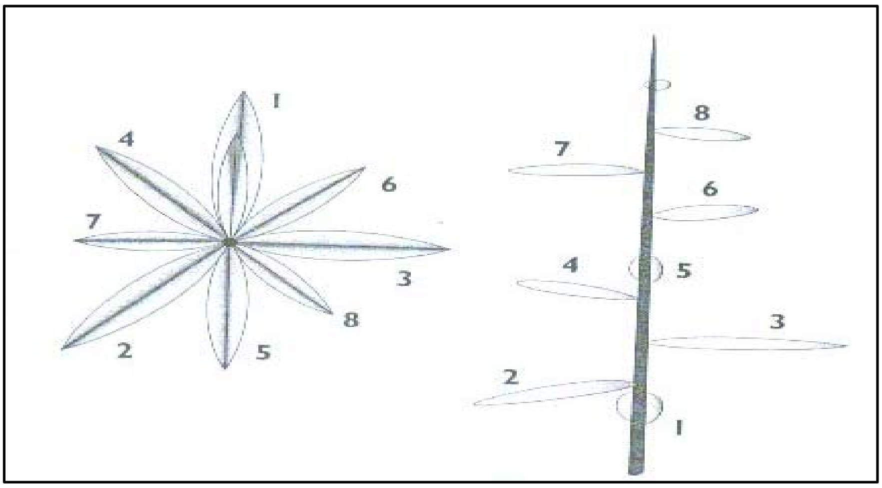
많은 식물들의 줄기 주위에 있는 잎들의 배치에서도 피보나치 수열을 찾을 수 있다. 식물을 위에서 내려다보면 위의 잎이 밑의 잎을 가리지 않도록 배열되어 있다. 이것은 각각의 잎들이 다 햇빛을 잘 받고, 가장 많은 수분을 받아내어, 잎과 줄기를 따라 뿌리로 보내도록 하기 위한 배치임을 짐작할 수 있다.

줄기를 회전하는 회전수와 잎에서 잎으로 갈 때마다 처음 출발한 잎의 바로 위의 잎을 만날 때까지 만나게 되는 잎들을 세는 데서 피보나치 수열을 발견할 수 있다. 각 방향에서의 회전수와 회전하며 만나게 되는 잎의 수는 연속하는 세 피보나치 수이다.

예를 들면, [그림 4]식물에서 줄기의 밑 근처에 있는 하나의 잎에 초점을 두고,  그것과 같은 방향으로 뻗어 나온 잎까지 도달하려면 시계방향으로 3바퀴 회전해야 하고 중도에서 5개의 잎들을 지난다. 반 시계방향으로는 2바퀴만 회전하면 된다. 이 때, 2, 3, 5는 물론 피보나치 수들이다. 다시 [그림 5]의 식물을 보면, 8개의 잎을 지나며 시계방향으로 5바퀴 회전하고, 반 시계방향으로는 3바퀴 회전한다.
역시, 3, 5, 8도 피보나치 수들이다. 위의 식물에 대해서는 잎당 시계 방향으로 $\frac{3}{5}$바퀴라고 하면 두 번째 식물은 잎당 $\frac{5}{8}$바퀴가 된다.




[그림 4] 잎의 배열




[그림 5] 잎의 배열

잎이 생겨나는 잎차례 비율이 피보나치의 수로 나타나는 식물의 예를 들면 다음과 같다.

<표 2> 잎차례 비율과 피보나치의 수

| 비율 | 식 물 들 |
|---|---|
| 2/3 | 화분과의 풀, 느릅나무 |
| 1/3 | 너도밤나무, 개암나무, 검은 딸기 |
| 2/5 | 참나무, 벚나무, 사과나무, 서양자두나무, 겨자나무, 살구나무 |
| 3/8 | 포플러나무, 장미, 배나무, 가지가 늘어지는 수양버들 |
| 5/13 | 갯버들, 아몬드 쇠뜨기 |

여기서 n/t은 t회전 당 n개의 잎이 있음을 의미한다. 즉, 1회전 당 n/t개의 잎이 있다는 것이다. 한 추정 자료에 의하면, 모든 식물의 90%에서 피보나치 수와 관계된 이런 형태의 잎의 배치를 보인다고 한다.

### 2) 꽃잎의 수와 꽃씨의 배열

#### 가) 꽃잎의 수

많은 꽃들은 그들의 싹이나 씨뿐만 아니라 꽃잎의 수에 있어서도 피보나치 수를 보여주고 있다. 솔잎은 종류에 따라 2개, 3개 또는 5개의 솔잎으로 된 송이로 자라는 경향이 있다. 백합과 아이리스, 붓꽃은 3개의 꽃잎이 있고, 미나리아재비는 5개의 꽃잎을 갖는다. 코스모스는 8개의 꽃잎을, 금잔화는 13개의 꽃잎을, 애스터는 21장의 꽃잎을 갖는다. 데이지는 13개, 21개 또는 34개, 55개, 89개의 꽃잎을 가지고 있는 것을 볼 수 있다. 직접 들에 나가 여러 가지 꽃들의 꽃잎을 세어 보면, 어떤 종들은 꽃잎의 수가 매우 정확하지만, (예를 들면 미나리아재비는 매우 정확한 꽃잎의 수를 갖는다.) 그렇지 않은 것들도 많다. 그러나 꽃잎의 수를 세어 평균적으로 나타내어 보면 다음과 같은 피보나치 수가 나타나고 있음을 알 수 있다.

<표 3> 꽃잎의 수와 피보나치 수

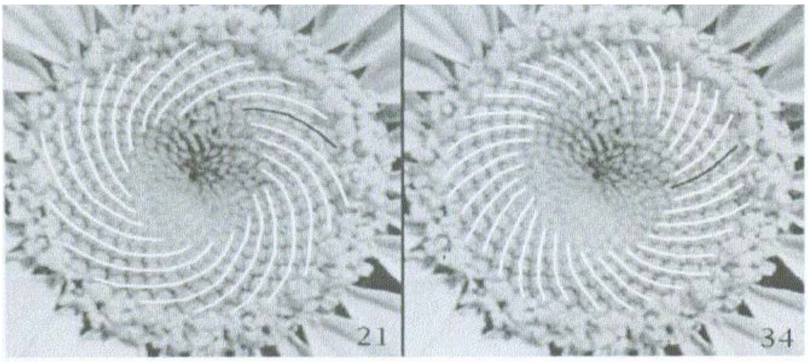
| 꽃잎의 수 | 식 물 들 |
|---|---|
| 2 | 마법의 가지과의 식물 |
| 3 | 백합, 아이리스, 붓꽃 |
| 5 | 미나리아재비, 도로가의 상추, 야생의 장미, 참매발톱꽃 |
| 8 | 코스모스, 참제비고깔, 뿌리가 붉은 양귀비과 식물 |
| 13 | 금잔화, 금불초, 시네라리아, 이중 참제비고깔 |
| 21 | 애스터, 검은 눈의 수산, 치커리 |
| 34 | 야생 데이지, 질경이, 제충국 |
| 55 | 아프리카 데이지, 갯개미취 |
| 89 | 갯개미취 |

나) 꽃씨의 배열

꽃술의 씨 배열에서도 피보나치 수열을 볼 수 있다.

해바라기는 독특한 방법으로 피보나치 수를 보여준다. 성숙한 해바라기 꽃의 중앙을 보면, 씨들의 다른 두 나선형을 분명히 볼 수 있다.

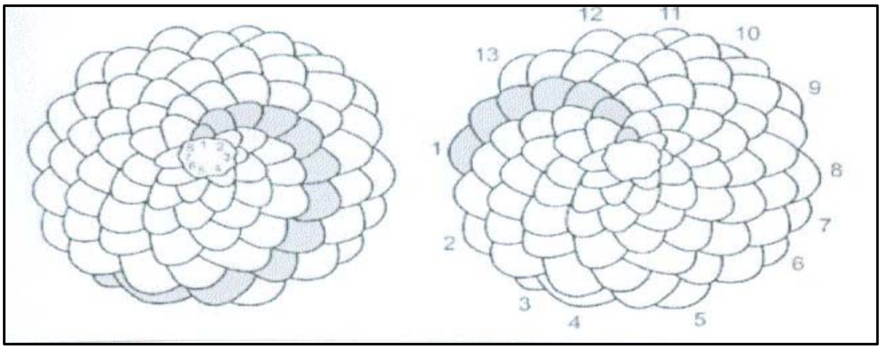
[그림 6]은 일상적으로 볼 수 있는 해바라기 씨이다. 해바라기 꽃씨를 확대한 그림으로 중심은 검은 점으로 표시되어 있다. 하나는 시계 방향으로 21개의 나선형, 다른 하나는 반 시계 방향으로 34개의 나선형을 형성하고 있다. 커다란 해바라기 꽃들은 21개와 34개를 가지고 있다고 보고되어 있다. 물론 이런 모든 수들은 인접한 피보나치 수들이다. 가끔씩 예외가 나타나기도 하지만 조사 결과들은 해바라기의 나선형의 수가 압도적으로 피보나치 수들로 나타나고 있다. 때로는 피보나치 수의 두 배로 나타나기도 한다. 예를 들면, 34, 55보다는 68, 110이 되는 경우이다.




[그림 6] 해바라기 꽃씨

자연에 존재하는 실제의 씨앗에서도 식물의 종류에 따라 다르지만, 나선의 수가 34와 55, 55와 89, 89와 144 등의 연속하는 피보나치 수가 쌍의 형태로 나타난다. 그리고, 씨앗들은 모두 같은 크기이며, 중심에 더 밀집해 있거나 가장자리에 드물게 모이거나 하지 않는다. 그 이유는 씨앗들이 크기에 상관없이 균일하게 쌓이는 데 최적의 형태인 것으로 보인다.

3) 솔방울




[그림 7] 솔방울의 나선

솔방울은 피보나치 나선형의 분명히 보여준다. [그림 7]은 솔방울의 나선을 강조해서 나타낸 것이다. 반 시계 방향의 나선과 시계 방향의 나선은 각각 같은 방향으로의 나선들을 나타내고 있다.

솔방울의 특성을 나타내는 나선형들은 피보나치 비율의 보다 명백한 예가 되곤 한다. 솔방울의 표면을 덮고 있는 잎들은 서로 압축되어 개조된 잎들로 생각할 수 있다. 그것들은 줄기에 둘러 있는 잎들처럼 솔방울을 나선형으로 둘러싸고 있다. 위 그림에서 보는 것처럼 두 종류의 나선형을 볼 수 있다. 왼쪽 솔방울은 시계 방향으로 8개의 나선이 왼쪽 아래에서 오른쪽 위 대각선 방향으로 천천히 가고, 오른쪽 솔방울은 반 시계 방향으로 13개의 나선이 오른쪽 아래에서 왼쪽 위 대각선 방향으로 보다 급하게 가로질러 가로 있다.

하나의 솔방울에서, 완급에 따른 나선형의 숫자는 항상 피보나치 수열에 나타난 수들과 거의 근접해 있다. 어떤 솔방울들은 3개의 완만한 나선형과 5개의 급한 나선형을 가지고 있다. 다른 것은 5개의 완만한 나선형과 8개의 급한 나선형을 가지고 있거나, 또는 8개의 완만한 나선형과 13개의 급한 나선형을 가진 것들도 있다. 이처럼 세 가지의 서로 다른 나선형을 가진 솔방울들은 모두 피보나치 수와 밀접한 관계를 가지고 있음을 보여주고 있다. 연구 결과, 솔방울들의 나선형 수는 99%정도는 피보나치 수열의 수로 나타난다는 사실이 밝혀지고 있다.

4) 꿀벌의 가계도

꿀벌의 가계도 또한 피보나치 수들을 보여준다.
꿀벌의 예에서는 다음과 같은 독특한 면이 있다.

① 꿀벌 모두가 두 명의 부모를 갖는 것은 아니다.
② 벌떼 중에는 여왕이라 불리는 특별한 암컷이 있다.
③ 여왕벌이 아닌 많은 암컷이 있지만 그들은 알을 낳지 못한다.
④ 일을 하지 않는 수펄들이 있다. 수펄들은 여왕의 수정되지 않은 알에서 태어나기 때문에 어미만 있고 아비는 없다.
⑤ 암펄은 여왕벌이 수펄과 짝지어 태어난다. 모든 암펄은 두 명의 부모를 갖게 되며 대부분 일벌이 된다. 이중 몇몇은 여왕벌로 자라게 되는데, 이 들은 집을 떠나 새 보금자리를 지을 장소를 찾아 새로운 벌떼를 이루게 된다. 그러므로 암펄은 어미, 아비 두 명의 부모를 갖지만, 수펄은 단지 어미만을 갖는다.

일하지 않는 수펄의 가계도를 살펴보자.

① 어미만을 갖는다.
② 2명의 조부모를 갖는다. 왜냐하면, 그의 어미는 2명의 부모, 암펄과 수벌 부모를 갖기 때문이다.
③ 3명의 증조부모를 갖는다. 왜냐하면, 그의 할머니가 2명의 부모를 갖고, 그의 할아버지는 어미만 갖기 때문이다.

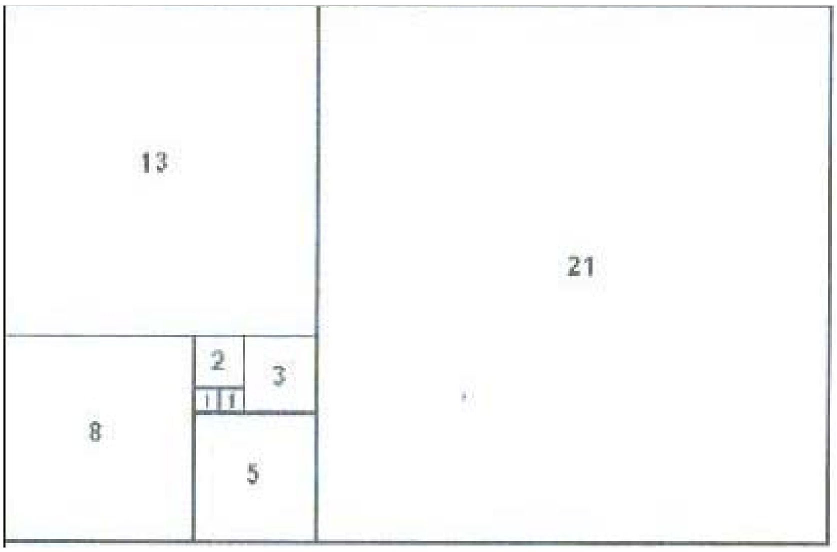
위의 수펄의 가계를 참고로 하여 꿀벌의 조상의 수에 대한 표를 만들어 보면 다음과 같다.

<표 4> 꿀벌의 조상의 수

| 구분 | 부모 | 조부모 | 증조부모 | 고조부모 | 5대조부모 | 6대조부모 | 7대조부모 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 수펄 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 |
| 암펄 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |

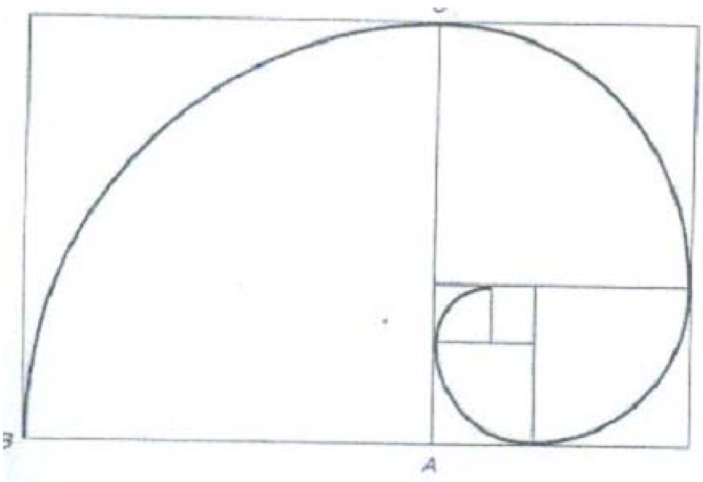
5) 조개의 나선형

피보나치 수 1,1,2,3,5,8,13,21,…는 다음과 같은 조립 도형의 작도에서도 나타난다. 한 변의 길이가 1인 두 정사각형을 옆으로 나란히 붙인다. 이 위에 한 변의 길이가 2(=1+1)인 정사각형을 그린다. 이제 단위 정사각형과 한 변의 길이가 2인 정사각형 모두에 접하는 새로운 정사각형을 그리자. 그러면 한 변의 길이가 3인 정사각형을 얻는다. 이러한 방법으로 계속해서 정사각형을 그려 나갈 수 있다. 새롭게 얻어지는 정사각형의 한 변의 길이는 가장 마지막 두 정사각형의 변의 길이의 합이 된다. 이 직사각형들의 집합은 두 변의 길이가 연속하는 피보나치 수가되며, 한 변의 길이가 피보나치 수인 정사각형들로 이루어져 있다. 이 직사각형들의 집합을 ‘ 피보나치 직사각형’ 이라고 부른다.



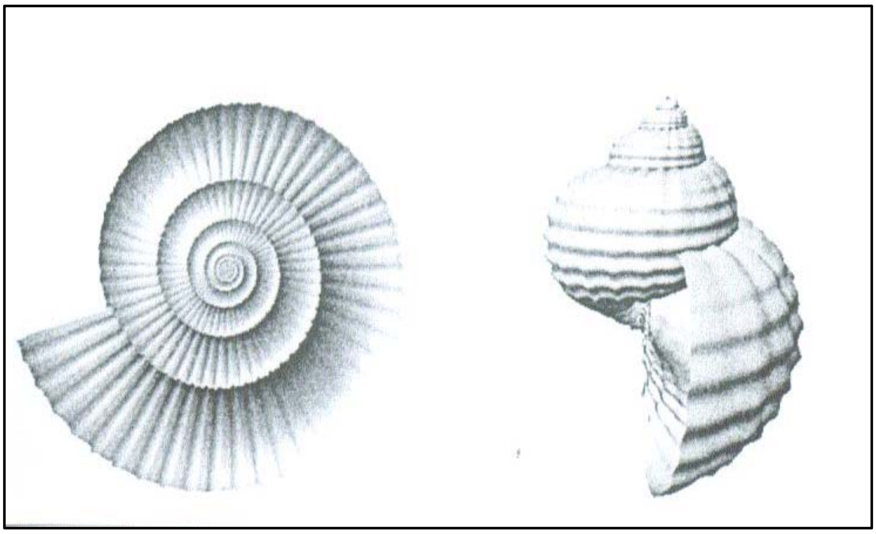

[그림 8] 황금 직사각형

[그림 9]에서 볼 수 있듯이, [그림 8]의 정사각형 안에 사분 원을 그려 넣어서 나선형을 그릴 수 있다. 이렇게 만들어진 것은 등각(equiangular) 나선 또는 대수적인 나선(logarithmic spiral)이라고 불리는데 거의 완벽에 가까운 아름다운 곡선이다. 이를 등각 나선이라고 부르는 이유는 그것의 중심으로부터 나온 반지름은 이 나선을 똑같은 각도로 자르기 때문이다.




[그림 9] 등각 나선

등각 나선의 가장 선명한 예는 앵무조개의 껍질이다. 앵무조개가 자라면서 그것이 사는 방은 더 커질 필요가 있고, 그것에 더하여 몸의 윤곽을 유지하기 위하여 같은 형태로 있게 된다. 앵무조개가 자라면서 껍질의 반경도 커지나, 반경과 앵무조개의 교차 각은 같은 각으로 유지된다. 그러므로 앵무조개의 방은 비슷한 모양을 가지면서 더 크게 된다.



[그림 10] 앵무조개 나선과 달팽이 껍데기

등각 나선들은 동물의 세계에서도 찾을 수 있다. 예를 들면 양의 뿔, 거미줄, 새의 부리, 고양이와 카나리아의 발톱, 상아, 박테리아의 성장 도표, 빛에 가까이 가는 곤충의 궤적이다. 대부분의 이런 일은 기본적으로 나선의 특징과 관계가 있다. 즉, 일정한 형태를 유지하면서 커진다.

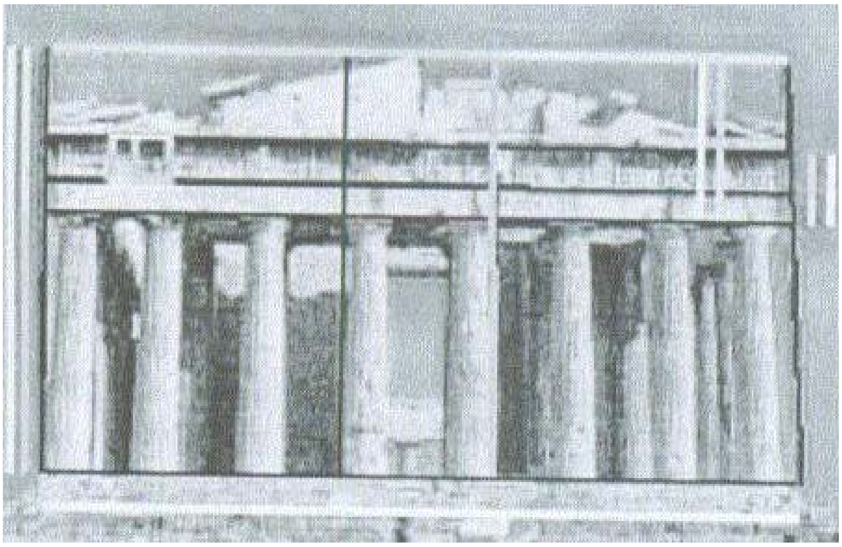
## 나. 피보나치 수열의 응용

### 1) 건축과 미술에서의 응용

황금분할은 이름 그대로 가장 아름다운 선분의 분할방법으로서 건축, 회화, 조각 등에서 이용되어 왔다. 비근한 예로는 액자를 비롯해서 책, 심지어 담배나 성냥갑마저도 대부분 가로, 세로의 길이가 황금분할의 비와 같게 만들어지고 있다. 그러나 ‘황금분할’이라든지 ‘황금비’라는 이름은 처음부터 그렇게 불려진 것은 아니었다. ‘황금비’라고 부르게 된 것은 지난 19세기 때부터였다.

건축에서 황금사각형을 사용했음을 나타내는 증거는 역사를 통해 세계 여러 곳에서 발견된다. 피라미드가 건축된 지 1,400년 후 이집트에 세워진 람세스 4세의 무덤에서는 내부에는 큰 사각형 안에 중간 사각형이, 또 그 안에 작은 사각형이 들어 있는 모양으로 있는데, 작은 것은 정사각형을 두 개 나란히 붙여놓은 모양을, 중간 사각형은 황금사각형 모양을, 큰 사각형은 황금사각형을 두 개를 붙여 놓은 모양을 하고 있다.

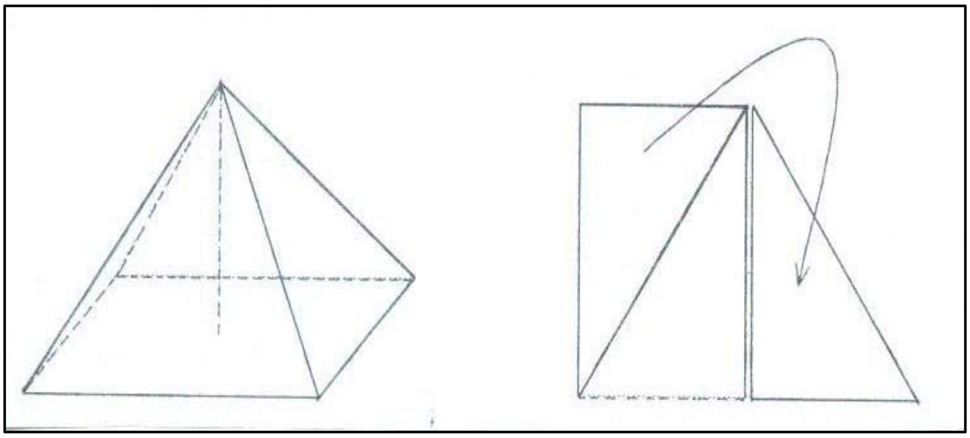
B.C. 400년경에 건조된 아테네의 파르테논 신전에서 외부 규격(치수)은 정확히 황금사각형을 나타내고 있는데, 파르테논 신전의 다른 여러 구조 속에서 황금비가 잘 나타나고 있다. 황금비를 ‘피(phi)’라고 부르는 것은 그리스의 가장 유명한 조각가였던 피디아스(Phidias) 때문인데, 이 황금비는 아테네 파르테논 신전의 기둥들의 위 부분에 있는 일련의 조작품을 포함하여 그의 여러 작품들 속에서 풍부하게 나타나고 있다.



[그림 11] 파르테논 신전의 황금직사각형

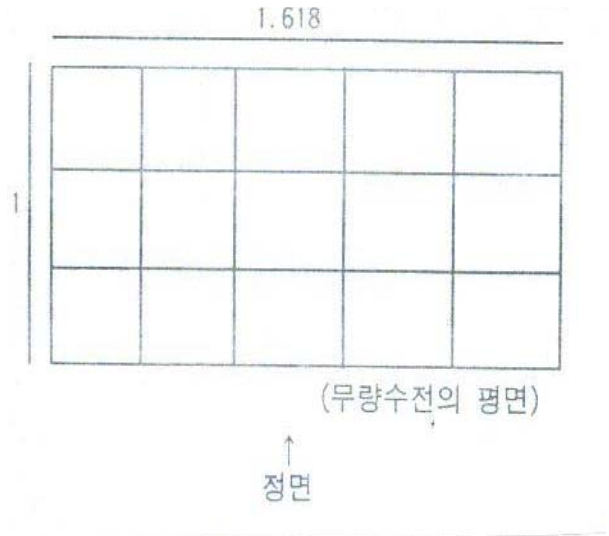
피라미드 중에서 가장 크고 완전한 것으로는 B.C. 2,600년경에 세워진 이집트의 기제(Gizeh) 마을에 있는 거대한 피라미드이다. 이 피라미드의 진가는 장대한 규모에 있는 것이 아니라, 거대한 규모의 건축물임에도 불구하고 가로-세로-높이의 비율이 무척 안정적인 구도로 되어 있다는 점에 있다. 이 피라미드에서 높이와 정사각형 밑면의 한 변에 대한 비는 5:8 또는 0.625이다. 더욱이 피라미드의 옆면 삼각형은 황금사각형을 대각선을 따라 자른 후 다시 이 사각형의 긴 변을 겹쳐 결합시킨 삼각형이다.

흥미롭게도 오늘날 이 피라미드의 밑면의 넓이는 13헥타르 또는 8에이크로 알려져 있는데, 헥타르와 에이크는 오늘날 가장 널리 사용되는 땅의 넓이 측량단위체계 중 하나이다. 또 평지에서 피라미드를 어느 쪽에서 보더라도 오직 3개의 선만 보일 뿐이며, 피라미드보다 높은 위치에서 피라미드를 보게 되면 모두 5개의 선이 보이게 된다. 또, 하늘 높은 데서 피라미드를 내려다보면 모두 8개의 선이 나타나게 된다. 여기에도 피보나치 수들이 살아 숨쉬고 있는 것이다.



[그림 12] 기제 마을의 피라미드와 옆면의 삼각형

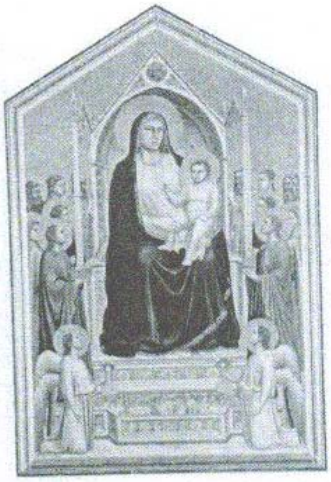
우리나라에는‘ 배흘림 기둥’ 으로 된 전통 건축 양식이 있는데, 그리스 신전에 쓰인 엔터시스 양식의 기둥과 같다.‘ 배흘림 기둥’ 으로 유명한 대표적인 건물은 고려 중엽에 세워진 부석사 무량수전인데, 평면에는 1:1.618의 황금비가 적용되어 아름다움을 자아낸다. 또, 무위사의 극락전, 화엄사의 대웅전 등에서도 이런 기둥을 볼 수 있다. 무량수전은 겉으로 보면 정면 5칸, 측면 3칸으로 지어져 있는데, 균형이 잘 잡힌 3:5의 비율임을 알 수 있다. 건물의 실제 비율은 1:1.618의 황금비이다.




[그림 13] 무량수전의 평면구도

레오나르도 다빈치가 '신의 비'라 이름을 붙인 황금비는 여러 명화에서 흔히 볼 수 있는데, 황금사각형 그 자체가 그림 속에서 자주 발견된다.

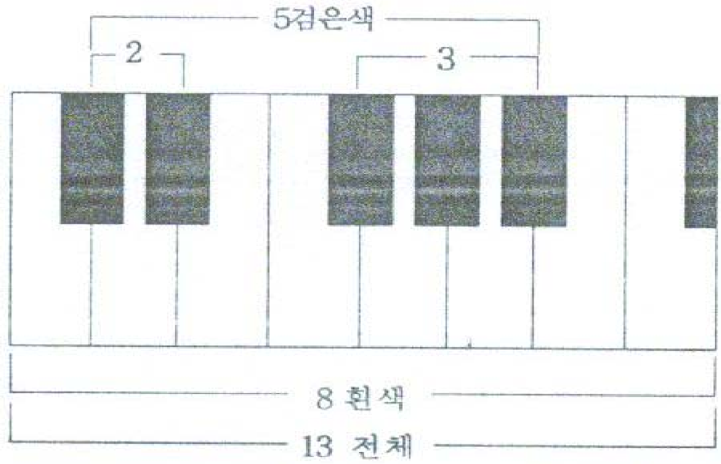
황금비는 다른 형태로도 나타나는데, 단순한 그림 외곽의 규격이나 바탕그림의 구도(grid) 등이 그러한 예이다. 이런 특성을 지닌 일련의 그림들은 고대의 대가에서 현대의 예술가에 이르기까지 그들이 지향하는 전통성과 스타일에 있어서 대표적인 것이다.



[그림 14] 황금사각형이 들어있는 여러 예술품

2) 음악에서의 응용

피보나치 수열과 음악 사이의 명백한 연관 관계는 피아노의 건반에서 가장 잘 나타난다. 피아노 건반에서 한 옥타브는 8개의 흰 키와 5개의 검은 키로 이루어져있다. 검은 키는 2개 또는 3개의 묶음으로 이루어져 있다. 한 옥타브에는 모두 13개의 키들이 있는데, 이것을 종합해 보면 피보나치 수열의 수가 나타남을 알 수 있다.




[그림 15] 피아노의 건반에 나타나는 피보나치 수

13개의 키는 반음계(chromatic scale)를 이루는데, 반음계는 서양 음악에서 가장 완전한 음계로 알려져 있다. 최초의 음계는 5개로 이루어진 5음계(pentatonic scale)였고, 그 이후에는 흔히 옥타브로 더 잘 알려진 8개의 키의 온음계(diatonic scale)가 발달하였다. 5음계는 초기 유럽 음악에 쓰였었고, 현재는 미국에서 아동을 위한 코다이식(Kodaly method) 음악 교육의 기초가 되고 있다. 피아노 건반에서 연이어지는 어떠한 5개의 검은 키들도 5음계를 이룰 수 있다. 미국 동요 중 여러 곡은 그 건반들만을 이용해서 연주할 수 있다. 한편, 우리의 고유 음계인 ‘중(솔), 임(라), 무(도), 황(레) 태(미)’를 사용하는 대다수의 민요가 여기에 해당된다. 여러 다른 음계들이 존재했지만 5음계(5), 온음계(8), 그리고 반음계(13)는 음악 발전 과정의 대부분을 차지하고 있다.

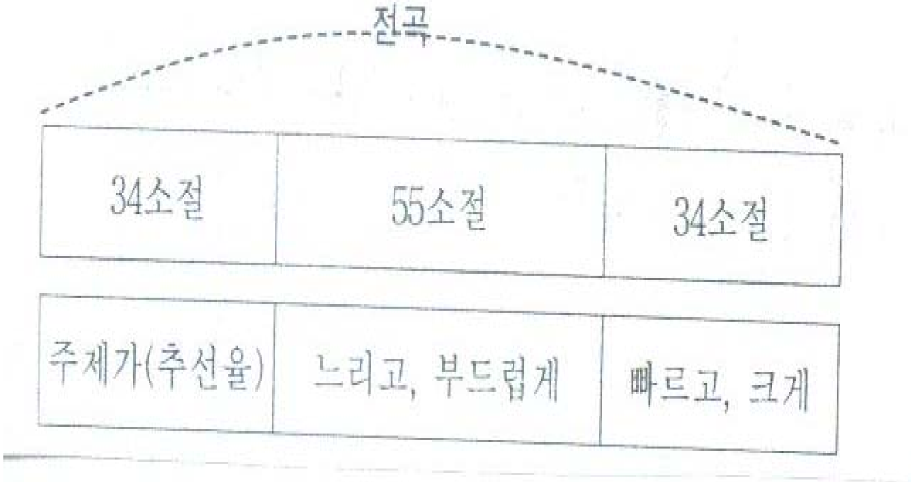
<표 5> 5음계, 8음계, 13음계를 사용한 음악

| 음 계 | 5음계 | 8음계 | 13음계 |
|---|---|---|---|
| 곡 명 | 아리랑<br>정선아리랑<br>한오백년<br>도라지 | 나뭇잎배<br>파란마음 하얀마음<br>님이 오시는지<br>산들바람 | 그리운 금강산<br>로망스<br>사랑으로<br>산들바람 |

많은 사람들에게 기분 좋게 들리는 음정은 장6도와 단6도로 알려져 있다.

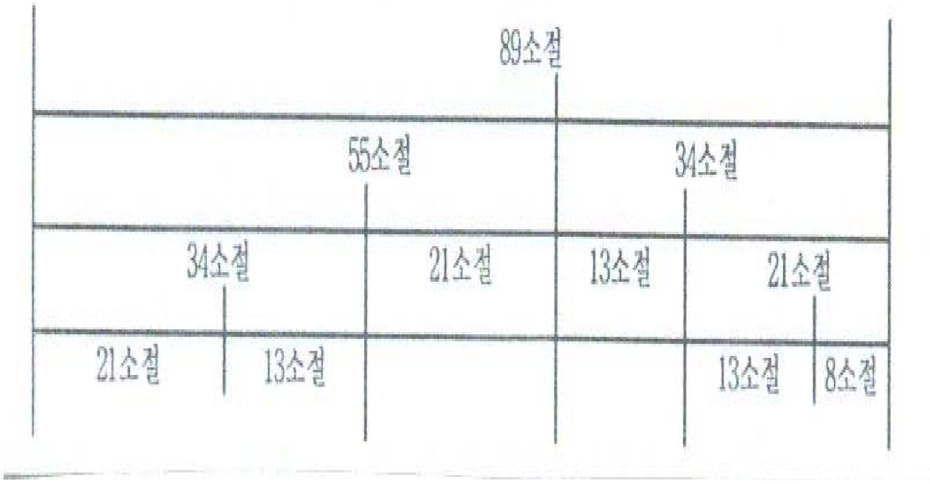
장6도 음정의 예를 들면, 1초에 약 264번 진동하는‘ 도’ 음과 1초에 약 440번 진동하는‘ 라’ 음으로 이루어진다. $\frac{264}{440}$의 비를 약분하면 피보나치의 비인 $\frac{3}{5}$이 된다. 단6도 음정의 한 예는 1초에 약 330번 진동하는‘ 솔’ 음과 1초에 약 528번 진동하는‘ 도’ 음이 있는데 $\frac{330}{528}$의 비를 약분하면 그 다음 피보나치의 비인 $\frac{5}{8}$가 된다. 어떤 6도 음정의 진동수의 비도 비슷한 비로 약분이 된다. 이런 것들로 인해 피보나치의 수들이 눈에 아름답게 보이는 것뿐만 아니라, 귀에도 아름답게 들리는 자연적인 조화의 일부로 알려져 있다. 아마도 이런 이유 때문에 작곡가들은 의식적으로든, 무의식적으로든, 그들이 작품에 피보나치의 수들과 비를 이용해 왔을 것이다. 그레고리안 성가와 바하의 푸가, 바로코크의 소나타를 포함하는 음악의 각 장르를 연구해 보면 그것이 사실임을 알 수 있다.

피보나치 수들은 음악 작곡에 있어서 매우 다양한 기능을 한다. 그 중 가장 중요한 것은 아마도 곡의 연주 시간을 피보나치 수의 비율, 즉 황금비율을 이루는 단계로 나누는 것이다. 음악의 전체적인 클라이막스나 템포의 변환점 등과 황금분할 지점이 일치하게 함으로써, 음악의 극적인 표현의 질을 결정하고 전달하는데 영향을 준다는 점에서 피보나치 비는 음악에서 중요한 역할을 하는 것이다. 이것을 하는 한 가지 방법은 박자들을 묶는데 피보나치 수들을 이용하는 것이다.




[그림 16] 음악의 연주 시간에 적용된 황금비

이 기법은 초기의 교회 음악에서 현대 음악까지, 팔레스트리나, 바흐, 베토벤, 바로토크를 포함하는 여러 작곡가들의 작품에 나타나있다. 음악의 연주 시간을 피보나치의 비로 나눈 한 예는 바로토크의 현악기, 타악기, 그리고 첼레스타(Celeste, 피아노와 비슷한 종소리를 내는 악기)를 위한 음악의 첫 악장으로 [그림 16]에 도표화하여 소개하였다.




[그림 17] 바르토크의 현악기, 타악기, 첼레스타를 위한 음악의 1악장

이처럼 곡 중 전체적인 비율에 있어서 소주제의 시작과 끝, 분위기와 느낌을 결정하기 위하여 여러 작곡가들이 곡의 각 단계의 길이를 피보나치의 비로 나누어  주었음을 알 수 있다. 또한 피보나치 수들은 몇몇의 작곡가에 의해 멜로디의 흐름을 발전시키는데 기여하였다. 1930년에 콜롬비아 대학의 수학 교수이자 음악 교수였던 조셉 실링거(Joseph Shillinger)는 피보나치 수열로 음정이 이루어진 멜로디는 마치 해바라기 씨앗이나 줄기에 붙은 나뭇잎의 성장 모형처럼 자연스럽다고 믿었다. 그리고 작곡 체계는, 한 멜로디의 연속적인 음이 그 이전의 음보다 피보나치 수만큼 높거나 낮은 음 또는 피보나치 수의 색다른 변형 음정으로 이루어진다고 주장하였다.

3) 토큰 교환

오락실에서 오락을 위한 동전을 파는 기계를 가정해 보자. 그 기계는 50원짜리나 100원짜리 동전만 넣을 수 있고, 거스름돈 없이 정확한 가격으로 50원짜리 토큰을 판매한다고 가정하면, 다음과 같이 지불할 수 있는 경우의 수를 생각할 수 있다.

| | |
|---|---|
| 토큰 1개를 살 때, 50원짜리 동전 1개 | (x) |

그것을 지불할 수 있는 방법은 1가지가 있다.

| | |
|---|---|
| 토큰 2개를 살 때, 50원짜리 동전 2개 | (xx) |
| 100원짜리 동전 1개 | (y) |

그것을 지불할 수 있는 방법은 2가지가 있다.

| | |
|---|---|
| 토큰 3개를 살 때, 50원짜리 동전 3개 | (xxx) |
| 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 1개 | (yx) |
| 50원짜리 동전 1개와 100원짜리 동전 1개 | (xy) |

그것을 지불할 수 있는 방법은 3가지가 있다.

| | |
|---|---|
| 토큰 4개를 살 때, 50원짜리 동전 4개 | (xxxx) |
| 100원짜리 동전 2개 | (yy) |
| 50원 1개, 100원 1개, 50원 1개 | (xyx) |
| 100원 1개, 50원 1개, 50원 1개 | (yxx) |
| 50원 1개, 50원 1개, 100원 1개 | (xxy) |

그것을 지불할 수 있는 방법은 5가지가 있다.

이와 같은 방법으로 토큰 5개를 살 때, 8가지 방법 (xxxxx) (yxxx) (xyxx) (xxyx) (xxxy) (xyy) (yxy) (yyx)가 있다.

이것을 정리하면 다음과 같다.

<표 6> 토큰의 수와 피보나치 수

| 주문된 토큰의 수 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 지불할 수 있는 방법의 수 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | … |

결론적으로 피보나치 수들은 예에서와 같은 기계를 만들기 위해 나와야 할 토큰의 수에 알맞은 돈을 받기 위해 몇 개의 방법으로 프로그램이 되어야 하는지 예상하는 데 도움을 줄 수 있다.

4) 계단 오르기

어떤 사람이 $n$개의 계단을 오르는데, 각 걸음마다 한 계단이나 두 계단을 오를 수 있다. 그 사람이 $n$개의 계단을 오를 수 있는 서로 다른 방법의 수 $a_n$에 대해 생각해 보자.

오를 수 있는 방법의 수를 살펴보면 다음과 같다.
1개의 계단을 오를 때, $a_1=1$
2개의 계단을 오를 때, $a_2=2$
3개의 계단을 오를 때, $a_3=3$ 이라는 것을 쉽게 알 수 있다.
4개의 계단을 오를 때, (1 - 2 - 1), (1 - 1 - 1 - 1),
(1 - 1 - 2), (2 - 2 - 1), (2 - 2)
즉, $a_4=5$ 가 된다.

이러한 조직적인 계단 오르는 방법의 나열을 포함하는 것을 깨버리고 또 다른 방법은 없는지 살펴보자.
먼저 첫 번째 오르는 경우는 한 계단 또는 두 계단을 오를 수 있다. 먼저 한 계단 오른 경우를 생각해 보면, 한 계단을 올라갔으므로 계단이 세 개가 남았다. 남은 세 계단을 오르는 방법은 $a_3$가지 방법이 있다. 만약 첫 번째 계단을 두 계단 올라갔다면 남은 두 계산을 오르는 방법은 $a_2$가지 방법이 남게 될 것이다.
따라서, $a_4= a_3+ a_2$가 된다.

이 방법을 $n$에 대해 응용하면

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ 이다.}$$

이 점화식을 이용하면,

$a_4=5$, $a_5=8$, $a_6=13$, $a_7=21$, $a_8=34$, ⋯

이것을 정리하면 다음과 같다.

<표 7> 계단 오르는 방법과 피보나치 수

| 계단 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 오르는 방법 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | ⋯ |

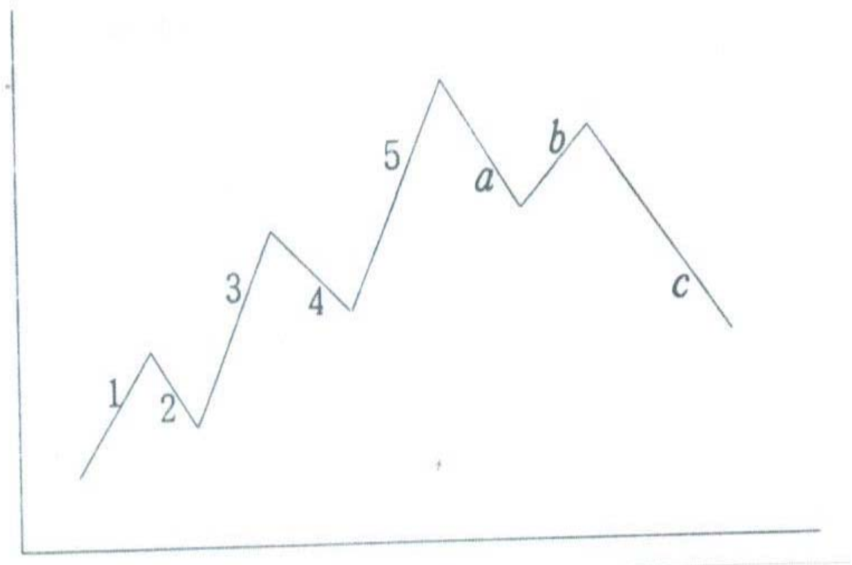
이와 같이 계단 오르는 방법과 같은 일상생활의 활동에서도 피보나치 수를 찾아볼 수 있다.

5) 주식시장에서의 응용

피보나치 수열로 나타나는 흥미로운 예 중의 하나는 주식 시장의 변화이다. 1930년대 중반 미국이 대공황에서 빠져나가기 시작할 무렵, 랄프 넬슨 엘리어트(Ralph Nelson Elliot)은 다우 존스 주가지수의 역사와 변화를 연구하였다. 엘리어트는 정확히는 알 수 없으나, 우리를 둘러싼 우주 또는 삼라만상을 움직이는 어떤 법칙이 존재하고 있음을 경험으로 알 수 있다고 하였다. 해가 지고 해가 뜨고, 사계절의 변화, 밤과 낮의 변화 등이 질서 있게 나타나는 것은 이러한 삼라만상을 움직이는 법칙이 없고서야 불가능한 일인 것이다. 그리고 우리들의 주된 관심사가 되는 주식 시장에서의 주가도 인간에 의하여 (인간의 낙천주의와 비관주의의 일정한 변화) 움직여지고 또한 삼라만상을 구성하는 일부분이 되므로, 당연히 우주 또는 삼라만상을 지배하는 법칙이 주식 시장에도 적용될 것임은 틀림없는 사실일 거라 생각했던 것이다.

엘리어트의 관찰들은‘ 엘리어트 파동(Elliot Wave) 원리’ 로 요약된다. 그것은 오늘날 투자 산업에서 증권 시장의 변화를 예측하는데 이용되는 원리 중의 하나이다. 엘리어트는 시장이 [그림 17]과 같이 8개의 파동으로 완전한 주기를 형성하면서 전개된다는 것을 알아챘다.

엘리어트의 기본적인 파동 패턴의 한 사이클은 상승 국면의 5개의 파동과 하락 국면의 3개의 파동으로 구성된다. 상승 국면에서의 5개의 파동은 각각 1번에서 5번까지의 파동으로 분류할 수 있는데, 상승하는 파동인 1번, 3번, 5번 파동은 충격파동(impulse wave)이라고 한다. 반대로 2번과 4번 파동은 조정 파동(corrective wave)이라고 한다. 또한 하락 국면의 3개의 파동은, a파동에서 시작하여 c파동으로 끝나는 전체적인 움직임이 하락 움직임이므로 a파동과 c파동이 충격 파동이 되는 것이고, 따라서 b파동은 조정 파동이 된다.




[그림 18] 엘리어트의 기본적인 파동 패턴

파동은 더 세분될 수 있거나 더 큰 파동의 부분이 될 수 있다. 파동은 늘어나거나 줄어들 수 있다. 그리고 그것은 다양한 변칙들로 앞에 있는 것을 뒤집어엎기도 한다. 그러나 기초가 되는 원형은 일정하다. 파동을 한 단계씩 세분해서 생기는 파동들의 숫자를 요약하여 정리하면 다음과 같다.

<표 8> 기본 파동을 세분했을 때 생기는 파동의 숫자

| 구 분 | 상승 국면의 파동 | 하락 국면의 파동 | 합 계 |
|---|---|---|---|
| 기본적인 파동 | 1 | 1 | 2 |
| 1차 세분시 | 5 | 3 | 8 |
| 2차 세분시 | 21 | 13 | 34 |
| 3차 세분시 | 89 | 55 | 144 |

각각의 파동의 개수들을 나타낸 숫자인 3이나 5, 그리고 그 합인 8, 또는 파동을 한 단계씩 세분해서 나타난 결과인 13, 21, 34, 55, 89, 144 등의 숫자는 파동을 세분해서 얻어진 숫자로서 바로 피보나치 수들이다.

엘리어트는 피보나치 수열이 군중 심리학의 문제를 해결하는 실마리라고 믿었다. 오늘날 증권 시장 전문가들 중에는‘ 엘리어트 파동 원리’ 를 시장의 동향을 예측하는 데 이용하기도 한다.

# V. 결 론

수학은 타 교과목에 비해 특히 기호화, 형식화되어 있기 때문에 성취도가 낮고, 학생들의 흥미 또한 저조한 편이다. 그러나 수학은 무미건조한 공식의 나열이 아니며, 수학 공부란 공식과 풀이 방법을 암기하여 문제를 푸는 일만을 하는 것이 결코 아니다. 수학은 어디까지나 생기에 찬 학문이며 인간에게 있어서 자연과 우주의 이론적 이해를 위하여 필연적으로 생겨난 인간의 지식 획득에 핵심적 역할을 하였고, 현재는 물론 미래에도 이런 활동은 계속될 것이다. 따라서, 중·고등학교 수학 교육이 공식의 암기와 문제 풀이 위주에서 벗어나 그 이론적 흐름을 이해시키며, 물질 및 정신세계의 현상을 설명하고 이해하는데 있어서의 수학의 역할을 강조해야 할 것이다.

‘우리는 왜 수학을 배우는가?’에 대한 답으로써‘수학이 아름답기 때문’과‘실용 학문이기 때문’은 빼놓을 수 없다. 그러나 현재 중·고등학교에 있는 학생들은 물론이거니와 학교를 졸업하고 사회인이 된 대부분의 사람들도 위의 두 가지 대답 중 어느 것에도 쉽게 수긍하지 못하는 것이 현실이다. 일반적으로 수학을 어렵게 느끼는 학생들이 “수학의 아름다움을 어디서 찾을 수 있는지” 혹은 “수학이 어디에 쓰이고 있는지”를 질문할 때, 교육현장의 교사들은 이에 알맞은 소재를 찾아 대답해 주기가 쉽지 않은 것은 사실이다. 또 입시 위주의 교육에 치중하다 보니 교사도 학생의 문제 풀이 능력의 신장에만 목적을 두며, 수학의 쓰임에 대한 것은 생각할 필요도 없었다. 이런 이유로 대부분의 사람들에게 수학은 실제로 적용되는 것이 아니라 고통스러운 학문으로서만 기억되고 있다. 또 수학은 일련의

암기과정이며 논리적 사고를 바탕으로 하는 학문의 기본 수단 정도로만 인식하고 있다. 또 수학의 어떤 이론은 이론으로만 존재하며, 그것이 실제로 응용된다는 것을 전혀 인식하지 못하고 있는 것도 사실이다.

학생들이 자연과 수학을 스스로 연결하고, 수학은 아직도 창조적인 상태에 있음을 깨닫도록 하는 것이 수학지도에 중요한 일이라고 생각된다. 이를 위하여 다양하고 이해하기 쉬운 수학사와 우리들의 생활과 문화와 자연 속에 있는 수학적 소재들이 수업 매체로 이용된다면 성취도가 낮은 학생들도 수학에 대하여 새로운 시각에서 관심과 흥미를 가지게 되어 적극적인 학습의욕으로 수업에 참여하게 될 것이다.

이 논문에서는 수학 수업에 있어서 학생들의 흥미를 불러일으킬 수 있는 수학사 중에서 흥미유발을 할 수 있고, 수학의 아름다움과 실용성을 동시에 보여 줄 수 있는 예로써 피보나치 수열의 발견과 응용 분야를 중심으로 살펴보았다. 자연현상 속에서 관찰되어지는 피보나치 수열의 모습, 예술과 건축, 주식시장에서 적용되어지는 피보나치 수열의 모습을 조사하였다. 중세 수학의 일상 생활의 토끼 번식 문제에서 파생된 피보나치 수열은 수열 그 자체의 성질뿐만 아니라, 자연 속에서 쉽게 관찰될 수 있는 동물・식물계의 법칙, 예술과 건축에의 활용, 또한 주식시장에서의 응용 등 수학의 아름다운 모습과 수학의 실용성을 보여줄 수 있는 좋은 재료중의 하나이다. 아름다운 조화를 이야기할 때, 대체로 우리는 황금분할을 말하는데, 바로 그것이 피보나치 수열의 성질 중 하나라는 사실과 더불어, 음악에서 작곡은 물론 피아노나 바이올린 같은 악기의 구조와도 상당히 밀접한 관계에 있다는 사실 등을 통하여 수학을 기피하는 학생에게 조금이나마 수학에 관심을 집중시키고 흥미를 가질 수 있는데 도움이 되기를 간절히 바란다.

# 참 고 문 헌


〔1〕 강철중・김부윤, 『수학의 이모저모』, 서울 : 보성각, 1999

〔2〕 김상숙, 『피보나치 수열에 대하여』, 경북대학교 교육대학원, 석사학위 논문,1999

〔3〕 김용운・김용국, 『수학사의 이해』, 서울 : 석우, 1999

〔4〕 김용운・김용국, 『재미있는 수학 여행』, 서울 : 김영사, 2000

〔5〕 김용운・김용국, 『수학사 대전』, 서울 : 우성문화사, 1996

〔6〕 김중근, 『엘리엇 파동이론 : 자연 법칙과 증권 시장』, 사계절, 1994

〔7〕 박교식, 『고등학교 수학용어 다시보기』, 서울 : 수학사랑, 2003

〔8〕 박규홍외 5명, 『수학Ⅰ』, 서울 : (주)교학사, 2004

〔9〕 박을용외 6명, 『수학 대사전』, 한국사전연구사, 1998

〔10〕 방신경, 『C. Debussy 음악에서의 황금분할에 의한 비례적 구조의 연구』, 성신여자대학교 교육대학원, 석사학위 논문, 1996

〔11〕 송은영, 『재미있는 수학상식』, 서울 : 맑은창, 2000

〔12〕 오시봉, 『피보나치 수열과 황금비에 관한 연구』, 제주대학교 교육대학원, 석사학원 논문, 1999

〔13〕 우정호, 『학교수학의 교육적 기초』, 서울 : 서울대학교출판부, 2002

〔14〕 우정호, 『수학 학습 - 지도원리와 방법』, 서울 : 서울대학교출판부, 2003

〔15〕 유극, 『황금분할』, 서울 : 기문당, 1995

[16] 윤영진, 『새로운 조합수학』, 서울 : 교우사, 2003
[17] 이계송, 『수학사를 도입한 고교 수업 방안 제시』, 한양대학교 교육대학원, 석사학위 논문, 1999
[18] 이만희, 『수학수업의 흥미유발을 위한 수학사 및 예화자료 연구』, 공주대학교 교육대학원, 석사학위 논문, 1999
[19] 류시규 역, 일본수학 세미나 편집부 원저, 『100人의 수학자』, 서울 : 의제, 2000
[20] 조영일, 『새로운 접근의 교육학 개론』, 서울 : 교육과학사, 2003
[21] 황혜정외 5명, 『수학교육학 신론』, 서울 : 문음사, 2002
[22] 교육부, 『중학교 교육 과정 해설(Ⅲ)』, 서울 : 대한교과서(주), 1999
[23] Howard Eves 지음, 이우영・신항균 역, 『수학사』, 서울 :경문사, 2002
[24] http://chaos.inje.ac.kr/Alife/fibo_art.htm
[25] http://chaos.inje.ac.kr/Alife/phylotaxis.htm
[26] http://cont2.edunet4u.net/%7Emathre/nmath/pvex.htm
[27] http://konot.kaist.ac.kr/～trefoil/hs100/golden/in.html
[28] http://my.dreamwiz.com/lyj1009/story12.htm
[29] http://my.netian.com/～tianmeng/fibo3.htm
[30] http://www.mathlover.co.kr
[31] http://www.naver.com

# 감사의 글

대학원에서의 생활이 어느덧 모두 지나고 졸업을 앞둔 지금 많은 생각이 스쳐지나 갑니다. 지난 2년 6개월간의 시간은 정말 저에게 소중한 시간이었고 앞으로도 좋은 추억으로 남을 것입니다. 때론 힘들었지만 저희를 배려해 주신 교수님들과 같이 공부한 동기들이 있었기에 행복했습니다. 이 논문이 나오기까지 많은 도움을 주시고 힘이 되어주신 분들께 감사의 마음을 전하고자 합니다.

먼저 미흡한 저를 세심하게 지도해 주시고 배려를 아끼지 않으셨던 이재권 교수님께 감사를 드립니다. 또한 논문을 심사해 주시면서 좋은 말씀과 조언을 해주신 정순영 교수님, 신창언 교수님께 감사드립니다. 늦은 시간까지 열과 성의를 다해 지도해 주신 여러 교수님께도 깊은 감사를 드립니다. 또한 함께 공부하며 도움을 주었던 22기 동기인 나리, 희경, 미선, 제연, 영미, 소현, 은영언니, 이창수 선생님과 대학원 선・후배님들께도 감사드리고 모두들 앞으로 보다 좋은 일들만이 가득하기를 바랍니다.

언제나 많은 격려와 관심을 가져준 경란언니, 진희언니, 진호오빠, 진희, 영예, 수정, 정숙, 혜정, 지은, 민선 그리고 모든 친구들에게 감사의 마음을 전합니다.

마지막으로 늘 곁에서 힘이 되어 준 오빠와 언니, 그리고 동생 회장에게도 고마움을 전하며 어느 누구보다도 제 학업을 격려하시고 항상 힘과 지혜를 주신 아버지 어머니께 머리 숙여 깊은 감사를 드립니다. 항상 건강하시기를 바라며 부모님께 이 논문을 드립니다.

2004년 7월

정회령 올림